

Paul Bourgade

Mémoire du **Master processus stochastiques**
sous la direction de Marc Yor

Lois de Poisson-Dirichlet

Contenu. Ce document présente quelques aspects de la loi de Poisson-Dirichlet à deux paramètres $PD(\alpha, \theta)$, telle qu'elle est introduite par Pitman et Yor [14].

Nous exposons tout d'abord la loi et ses domaines d'application (partie 1). Pour un processus de Bessel de dimension $2(1 - \alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), nous rappelons ensuite que les longueurs des excursions ont pour loi $PD(\alpha, 0)$, que ce soit sur l'intervalle $[0, s]$ ou $[0, \tau_s]$, où τ est l'inverse du temps local (partie 2). Cette description géométrique des lois de Poisson-Dirichlet est ensuite généralisée au cas à deux paramètres, pour lequel est exhibé un subordonateur de sauts adéquats (partie 3). Enfin, pour apercevoir la grande étendue d'application de ces lois, nous montrons comment $PD(0, 1)$ intervient naturellement en arithmétique (partie 4).

Références

1. Richard Arratia, A.D. Barbour, Simon Tavaré, Logarithmic Combinatorial Structures : a Probabilistic Approach, *EMS, 2003*.
2. Jean Bertoin, Random Fragmentation and Coagulation Processes, *Cambridge University Press, à paraître (août 2006)*.
3. Philippe Biane, Jean-François le Gall et Marc Yor, Un processus qui ressemble au pont brownien, *Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 21 (1987), p 270-275*.
4. Philippe Biane, Jim Pitman and Marc Yor, Probability laws related to the Jacobi Theta and Riemann Zeta functions, and brownian excursions, *Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 38 (2001), Number 4, Pages 435-465*.
5. P. Billingsley, On the distribution of large prime divisors, *Periodica Mathematica Vol. 2 (1-4), 1972, p 283-289*.
6. Peter Donnelly and Geoffrey Grimmett, On the asymptotic distribution of large prime factors, *J. London Math. Soc. (2) 47 (1993) 395-404*.
7. S.A. Molchanov and E. Ostrowski, Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes, *Th. Prob. App., 14 (1969), 128-138*.
8. Mihael Perman, Order statistics for jumps of normalized subordinators, *Stochastic Processes and their Applications 46 (1993) 267-281*.
9. Mihael Perman, Jim Pitman and Marc Yor, Size-biased sampling of Poisson point processes and excursions, *Probab. Theory Relat. fields 92, 21-39 (1992)*.
10. Jim Pitman, Combinatorial stochastic Processes, *Technical Report No. 621, Department of Statistics U.C. Berkeley CA 94720, Lectures notes for St. Flour course, July 2002*.
11. Jim Pitman, The two-parameter generalization of Ewen's random partition structure, *Technical Report No. 345, Department of Statistics U.C. Berkeley CA 94720, March 1992*.
12. Jim Pitman and Marc Yor, Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator, *Proc London Math. Soc. (3), 1992, Vol 65, 326-356*.
13. Jim Pitman and Marc Yor, On the relative lengths of excursions derived from a stable subordinator, *Sém. Prob. XXXI, Lect; Notes in Maths. No 1655, p. 287-305 (1997)*.
14. Jim Pitman and Marc Yor, The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator, *The Annals of Probability, 1997, Vol 25, No 2, 855-900*.
15. Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, *Editions Springer, 1998*.
16. A.V. Skorokhod, Random Processes with Independent Increments, *Moscow, Nauka, 1964 (In Russian)*.

Table des matières

Introduction : la loi de Poisson-Dirichlet $PD(\alpha, \theta)$ et quelques applications	5
1. Définition et propriétés de la loi	5
1.1. Notion de « size biased sampling »	5
1.2. La loi de Poisson-Dirichlet	5
2. Applications diverses	6
2.1. Démographie : le modèle de Yule	6
2.2. Biologie	6
2.3. Combinatoire	7
2.4. Théorie des nombres	7
2.5. Excursions de processus stables	8
 Longueurs des excursions des processus stables	 9
1. Égalité en loi de $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ et \mathbb{V}_t/t	9
2. Réarrangements et « size biased sampling »	12
3. Les temps « admissibles »	16
 Lois de Poisson-Dirichlet : quelques représentations	 17
1. $PD(\alpha, 0)$: la loi des excursions	17
1.1. $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ a pour loi $PD(\alpha, 0)$	17
1.2. Autres représentations de la loi $PD(\alpha, 0)$	19
2. Formule d'absolue continuité entre $PD(\alpha, 0)$ et $PD(\alpha, \theta)$	20
3. Processus associé à $PD(\alpha, \theta)$	20
4. Lois finidimensionnelles : la formule de Perman	21
 Le théorème de Billingsley	 23
1. Énoncé	23
2. Démonstration de Donnelly et Grimmett	24
3. Équivalence des deux théorèmes	26
 Annexes	 27
1. Processus de Bessel et subordinateurs stables	27
2. Le critère de Lukacs	28

Introduction : la loi de Poisson-Dirichlet $PD(\alpha, \theta)$ et quelques applications

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à certaines distributions d'une suite de variables aléatoires $\mathbb{V} = (V_1, \dots, V_n, \dots)$ avec

$$V_1 > V_2 > \dots > 0 \text{ et } \sum_n V_n = 1 \text{ p.s.}$$

L'espace des suites vérifiant ces deux propriétés est appelé « simplexe ».

1. Définition et propriétés de la loi

1.1. Notion de « size biased sampling »

Soit V_n la proportion d'individus d'espèce n dans une population. Alors un individu choisi au hasard aura une probabilité V_n d'appartenir à l'espèce n . La définition du « size biased picked » formalise cette idée : pour une suite $\mathbb{V} = (V_1, \dots)$ du simplexe, une variable aléatoire \tilde{V}_1 est dite « size biased picked » si

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_1 = V_n \mid \mathbb{V}) = V_n.$$

Définition : la « size biased permutation ». Pour $\mathbb{V} = (V_1, \dots)$ une suite du simplexe, une suite $\tilde{\mathbb{V}} = (\tilde{V}_1, \dots)$ du simplexe est dite une « size biased permutation » de \mathbb{V} si, pour tous $n \geq 1$ et $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_{n+1} = V_j \mid (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_n), \mathbb{V}) = \mathbf{1}_{V_i \in [1, n], V_j \neq \tilde{V}_i} \frac{V_j}{1 - (\tilde{V}_1 + \dots + \tilde{V}_n)}.$$

On peut définir plus généralement une « h -biased permutation » de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(\tilde{V}_{n+1} = V_j \mid (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_n), \mathbb{V}) = \mathbf{1}_{V_i \in [1, n], V_j \neq \tilde{V}_i} \frac{h(V_j)}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} h(\tilde{V}_k)},$$

où h est une fonction mesurable positive telle que $0 < \sum_{k=1}^{+\infty} h(\tilde{V}_k) < +\infty$ p.s. Cette généralisation est utilisée notamment dans [9], pour des fonctions h plus générales que $h(x) = x$.

1.2. La loi de Poisson-Dirichlet

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Nous rappelons qu'une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$ est dite de loi $\beta(a, b)$ si sa densité est

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

De plus une variable aléatoire à valeurs dans $]0, +\infty[$ est dite de loi gamma de paramètre θ si sa densité est

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x}.$$

Définition : la loi de Poisson-Dirichlet. Soient $0 \leq \alpha < 1$ et $\theta > -\alpha$. Supposons que selon une probabilité $P_{\alpha, \theta}$, des variables aléatoires $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots$ sont indépendantes avec \tilde{Y}_n de loi $\beta(1 - \alpha, \theta + n\alpha)$. On définit alors la suite \tilde{V} par

$$\tilde{V}_1 = \tilde{Y}_1, \quad \tilde{V}_n = (1 - \tilde{Y}_1) \dots (1 - \tilde{Y}_{n-1}) \tilde{Y}_n.$$

Soit \mathbb{V} la suite des valeurs décroissantes de \tilde{V} . Alors la distribution de Poisson-Dirichlet de paramètres α et θ (notée $PD(\alpha, \theta)$) est définie comme la distribution de \mathbb{V} sous $P_{\alpha, \theta}$.

Cette définition est due à Pitman et Yor [14], qui généralisent deux cas particuliers de lois de Poisson-Dirichlet :

- la loi de Kingman $PD(0, \theta)$, qui interviendra naturellement dans le paragraphe suivant ;
- $PD(\alpha, 0)$, dont Perman a montré qu'il s'agit de la loi des longueurs des excursions réordonnées d'un processus stable.

Nous comprendrons mieux dans la partie 3, grâce au théorème 5, pourquoi ces deux distributions apparaissent naturellement.

2. Applications diverses

Dans la suite du mémoire, nous ne nous intéressons qu'aux applications concernant la théorie des excursions et la théorie des nombres. D'autres domaines où $PD(\alpha, \theta)$ intervient sont succinctement abordés ci-après.

La majeure partie des applications que nous évoquons (les trois premières) concerne en réalité la distribution $PD(0, \theta)$ de Kingman . Pour comprendre pourquoi cette distribution intervient naturellement, nous exposons pour chacun des domaines suivants un exemple.

2.1. Démographie : le modèle de Yule

Soit un processus de naissance avec :

- initialement aucun individu ;
- un taux d'immigration de θ ;
- un taux de naissance de 1 par individu.

Soit $I(t)$ le nombre total d'habitants au temps t et $\xi_i(t)$ la taille de la famille du i -ième habitant. Alors on peut montrer les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-t} I(t) \\ (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \dots) I(t)^{-1} \end{array} \right\} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \left(\begin{array}{l} \gamma(\theta) \\ (U_1, U_2(1 - U_1), U_3(1 - U_2)(1 - U_1), \dots) \end{array} \right)$$

où $\gamma(\theta)$ est une variable aléatoire de loi gamma de paramètre θ et les U_i sont iid de densité $\theta(1 - x)^{\theta - 1}$ sur $[0, 1]$: les proportions décroissantes des familles tendent vers $PD(0, \theta)$.

2.2. Biologie

Considérons un échantillon de n individus appelés η_1, \dots, η_n et $A_1(n)$ le nombre d'individus de première espèce, $A_2(n)$ le nombre d'individus de seconde espèce etc. Une autre façon de décrire l'échantillon est de le caractériser par $C_1(n)$, le nombre d'espèces ayant 1 représentant, $C_2(n)$, le nombre d'espèces ayant 2 représentants, etc ($\sum i C_i(n) = n$). On note aussi $K(n) = \sum C_i(n)$ le nombre d'espèces dans l'échantillon.

On suppose que les espèces présentes dans la population suivent une loi $PD(\alpha, \theta)$ (ce qui est concevable au vu de l'exemple précédent) et que les individus de l'échantillon sont tirés au sort uniformément dans la population. Alors si un vecteur \vec{a} vérifie $\sum ia_i = n$ on a la « Pitman sampling formula » [11] :

$$\mathbb{P}(\vec{C}(n) = \vec{a}, K_n = k) = \frac{n!}{(\theta + 1)_{n-1}} (\theta + \alpha)(\theta + 2\alpha) \dots (\theta + (k-1)\alpha) \prod_{j=1}^n \left(\frac{(1-\alpha)_{j-1}}{j!} \right)^{a_j} \frac{1}{a_j!},$$

où $x_n := x(x+1) \dots (x+n-1)$ est le symbole de Pochhammer.

2.3. Combinatoire

Considérons le processus suivant, appelé « Chinese restaurant process » : un individu (1) commence une nouvelle table. Avec probabilité $\theta/(\theta + 1)$, (2) commence une nouvelle table, sinon il va se placer à droite de (1). Une fois les $r - 1$ premiers individus placés, (r) commence une nouvelle table avec probabilité $\theta/(\theta + r - 1)$ et se place à droite d'un des $r - 1$ premiers individus sinon (avec probabilité uniforme). Au placement de n individus on peut associer un élément du groupe symétrique \mathcal{S}_n , par sa décomposition en cycles à supports disjoints.

Le cas $\theta = 1$ correspond aux permutations distribuées selon la mesure uniforme, pour lesquelles on peut montrer le résultat suivant : la suite des longueurs décroissantes des éléments de \mathcal{S}_n converge faiblement vers $PD(0, 1)$.

Ce résultat est analogue au théorème de Billingsley, démontré en dernière partie, relatif aux diviseurs premiers d'un entier aléatoire. Cependant il est difficile de voir le lien explicite entre ces objets de nature différente (la décomposition en facteurs premiers et la décomposition en cycles à support disjoints), même si une structure commune est donnée dans [1].

2.4. Théorie des nombres

Des liens étroits et inattendus entre excursions browniennes et théorie des nombres sont évoqués par Biane, Pitman et Yor [4]. Soit $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ ($\Re s > 1$) la fonction zeta de Riemann.

Parmi les résultats surprenants, si on note $(b_u, 1 \leq u \leq 1)$ un pont brownien et

$$Y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\max_{0 \leq u \leq 1} b_u - \min_{0 \leq u \leq 1} b_u \right),$$

alors on a

$$\mathbb{E}(Y^s) = 2\xi(s),$$

où ξ est définie par $\xi(s) = 1/2 s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ pour $\Re(s) > 0$ et $\xi(1-s) = \xi(s)$. Remarquons qu'il existe beaucoup d'autres variables aléatoires définies à partir de processus de Bessel ayant la loi de Y . L'équation $\xi(1-s) = \xi(s)$ permet de voir que pour toute fonction g positive mesurable on a

$$\mathbb{E}(g(1/Y)) = \mathbb{E}(Yg(Y)),$$

donc la distribution de $1/Y$ est la même que celle de \tilde{Y} , obtenue par « size biased sampling » à partir de Y .

Ceci suggère une analogie avec l'étude des lois de Poisson-Dirichlet et suggère très partiellement pourquoi ces lois apparaissent en arithmétique. Faute de lien plus apparent, nous préférons exposer une démonstration du théorème de Billingsley en dernière partie : on y comprend mieux pourquoi le « size biased sampling » et $PD(0, 1)$ interviennent.

L'idéal serait de trouver une nouvelle démonstration de ce théorème fondée uniquement sur les propriétés de « size biased » sampling de la fonction ξ .

2.5. Excursions de processus stables

Il s'agit du propos des deux parties suivantes... Nous y constatons que les longueurs décroissantes et normalisées des excursions de processus α -stables sont de loi $PD(\alpha, 0)$.

Longueurs des excursions des processus stables

Dans toute cette partie, nous considérons $(\tau_s, s \geq 0)$ un subordonateur α -stable, par exemple l'inverse du temps local d'un processus de Bessel $(B_t, t \geq 0)$ (dont on considère la version continue) de dimension $2(1 - \alpha)$ ($0 < \alpha < 1$).

Commençons par les simples remarques suivantes, à propos des excursions de $(B_s, 0 \leq s \leq 1)$ de longueur > 0 :

- elles sont **dénombrables**, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a clairement un nombre fini d'excursions de longueur supérieure ou égale à $1/n$. Notons ainsi $\tilde{V} = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots\}$ les longueurs des excursions. Comme leur somme est finie (inférieure ou égale à un), il existe une permutation \mathbb{V} des \tilde{V} telle que $V_1 \geq V_2 \geq \dots$. De plus, comme la longueur d'une excursion correspond à un saut de l'inverse du temps local, la probabilité que deux excursions aient la même longueur est nulle. Dans la suite on notera donc $V_1 > V_2 > \dots$.
- **la somme de leurs longueurs est égale à 1**. L'ensemble \mathcal{Z} des zéros du processus de Bessel est de mesure de Lebesgue presque sûrement nulle, comme le montre le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}(\mu(\mathcal{Z})) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \mathbb{1}_{B_t=0} dt\right) = \int_0^1 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{B_t=0}) dt = \int_0^1 \mathbb{P}(B_t = 0) dt = 0.$$

De plus, comme à tout point de $[0, 1]$ on peut associer une excursion de longueur > 0 ou un zéro, $\mu(\mathcal{Z}) + \sum_{i=1}^{\infty} V_i = 1$, donc $\sum_{i=1}^{\infty} V_i = 1$.

La suite de cette partie est organisée de la façon suivante.

1. Nous montrons tout d'abord l'égalité en loi de $\mathbb{V}(t)/t$ et $\mathbb{V}(\tau_s)/\tau_s$. De plus nous montrons que dans le cas d'un temps t fixe, la dernière longueur d'excursion peut être choisie par « size biased sampling ».
2. Nous donnons ensuite une formulation mathématique à l'idée naturelle suivante : « le subordonateur étant à accroissements indépendants, étant donné $\mathbb{V}(\tau_s)$, tous les ordres possibles des excursions sont équiprobables ».
3. Enfin l'identité $\mathbb{V}(T)/T \sim \mathbb{V}_t/t$ est étendue à toute une classe de temps T .

Ces parties sont directement inspirées de Pitman et Yor, respectivement de [12] pour les deux premières et de [13] pour la dernière.

1. Égalité en loi de $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ et \mathbb{V}_t/t

Tout d'abord, remarquons que par propriété de scaling des processus α -stables (pour $a > 0$ fixé $(\tau_s, s \geq 0) \sim (a\tau_{s/a^\alpha}, s \geq 0)$), nous avons le résultat suivant.

Proposition. Pour tous $s > 0$ et $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{\mathbb{V}_t}{t} \sim \frac{\mathbb{V}_s}{s} \\ \frac{\mathbb{V}_{\tau_t}}{\tau_t} \sim \frac{\mathbb{V}_{\tau_s}}{\tau_s} \end{cases} .$$

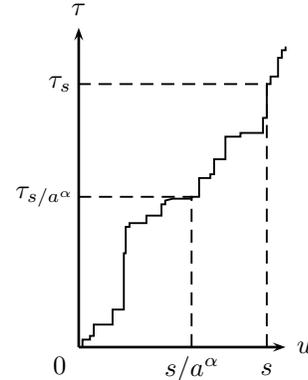
Démonstration.

Par propriété de scaling, on a $(B_u, 0 \leq u \leq t) \sim \sqrt{t/s}(B_{\frac{s}{t}u}, 0 \leq u \leq t)$. Ainsi, comme \mathbb{V}_t et $\frac{t}{s}\mathbb{V}_s$ sont une même fonction de ces deux processus, on a $\mathbb{V}_t \sim \frac{t}{s}\mathbb{V}_s$.

Pour la seconde inégalité, nous passons cette fois-ci par la stabilité de τ , inverse du temps local. Nous avons $(\tau_u, u \in [0, s]) \sim (a\tau_{u/a^\alpha}, u \in [0, s])$. Ainsi les sauts aussi ont même loi, $(\{\Delta\tau_u, u \in [0, s]\}, \tau_s) \sim (\{\Delta a\tau_{u/a^\alpha}, u \in [0, s]\}, a\tau_{s/a^\alpha})$, donc

$$\{\Delta\tau_u, u \in [0, s]\}/\tau_s \sim \{\Delta a\tau_{u/a^\alpha}, u \in [0, s]\}/a\tau_{s/a^\alpha}.$$

Comme les éléments de \mathbb{V}_{τ_s} sont les mêmes que ceux de $(\Delta\tau_u, u \in [0, s])$, ceci signifie exactement $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s \sim \mathbb{V}_{\tau_s/a^\alpha}/\tau_{s/a^\alpha}$: la loi de $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ est indépendante de s . \square



Paul Lévy a montré que le temps passé par un brownien standard dans $[0, +\infty[$ suit la loi de l'arc sinus, pour un intervalle fixe $[0, t]$ mais aussi pour un intervalle compris entre deux zéros, de type $[0, \tau_s]$. Cette loi identique, malgré le comportement radicalement différent au bout de l'intervalle (B_t est non nul p.s. alors que B_{τ_s} est nul p.s.), est remarquable et pas nécessairement intuitive.

Le même type de résultat est également valable dans notre cas : $\mathbb{V}_t/t \sim \mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$. De même que pour la proposition précédente, ceci est une conséquence de la stabilité de τ , mais nettement moins immédiate. De plus, pour t fixe, nous allons voir que le dernier intervalle peut être choisi par « size biased sampling ».

Pour montrer ces résultats, nous aurons d'abord besoin des deux lemmes suivants. Le premier est une définition très visuelle du temps local, il montre que les longueurs des excursions suffisent à le définir. Quant au second, il lie la loi d'une mesure ponctuelle de Poisson à la loi de la même mesure à laquelle on enlève un point.

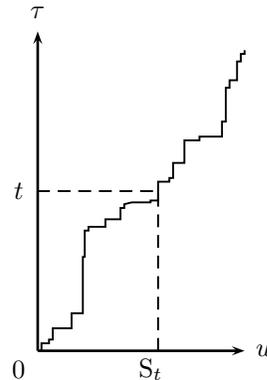
Lemme : temps local et longueurs des excursions. Soit τ_s un subordonateur, de mesure de Levy $\Lambda(dx)$, associé au temps local S_t d'un processus B . Soient V_1, V_2, \dots les longueurs des excursions de B sur $[0, t]$. Alors

$$S_t \stackrel{ps}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\{i : V_i > \varepsilon\}|}{\Lambda(\varepsilon, \infty)}.$$

Démonstration. Remarquons que les accroissements de τ sont les éléments d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ . Il suffit donc de montrer que pour N un tel processus on a $N_{S_t}(\varepsilon, \infty)/\Lambda(\varepsilon, \infty) \rightarrow S_t$ p.s. pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Commençons donc par prouver que

$$\frac{N_t(\varepsilon, \infty)}{\Lambda(\varepsilon, \infty)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t \text{ ps.}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit ε_k l'unique réel > 0 tel que $\Lambda(\varepsilon_k, +\infty) = k$; alors les variables aléatoires



Pour montrer (1), il nous suffit donc de montrer que $\mathbb{V}_t/S_t^{1/\alpha} \sim \mathbb{V}_{\tau_s} s^{1/\alpha}$. Or $\mathbb{V}_{\tau_s}/s^{1/\alpha}$ est la suite décroissante des éléments d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ . Ainsi, si on définit N par

$$N_t(B) = |\{i : V_i(t)/S_t^{1/\alpha} \in B\}|,$$

pour tout borélien B , il suffit de montrer que N est un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ . De plus, si on note $X_t = V_{i_t}/S_t^{1/\alpha}$, (2) est alors équivalent à $\mathbb{P}(X_t \in dx \mid N_t) = xN_t(dx) / \int yN_t(dy)$. En résumé, pour montrer les deux assertions de notre théorème, il suffit d'avoir

$$\mathbb{P}(X_t \in dx, N_t \in dn) = \frac{x n(dx)}{\int y n(dx)} Q(dn),$$

où Q est la loi d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ . D'après le deuxième lemme, il nous suffit même de montrer que

$$\mathbb{P}(X_t \in dx, N_t^- \in dn) = \frac{x n(dx)}{x + \int y \Lambda(dx)} Q(dn),$$

où $N_t^- = N_t - \delta_{X_t}$. Pour montrer ce résultat, il faut regarder le processus M (défini par $M_s = \tau_s - \tau_{s^-}$) et conditionner selon S_t et Y_t , longueur de l'excursion traversant t . Plus précisément, M est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\Lambda(dx)ds$. Comme (S_t, Y_t) est l'unique point (s, y) vérifiant $\tau_{s^-} < t \leq \tau_{s^-} + y$, on a $\mathbb{P}(S_t \in ds, Y_t \in dy, M \in dm) = \mathbb{1}_{\tau_{s^-} < t \leq \tau_{s^-} + y} m(dsdy) \mathbb{P}(M \in dm)$. D'après le second lemme, ceci implique

$$\mathbb{P}(S_t \in ds, Y_t \in dy, M^- \in dm) = \mathbb{1}_{\tau_{s^-} < t \leq \tau_{s^-} + y} ds \Lambda(dy) \mathbb{P}(M \in dm),$$

où M^- est le processus M auquel on enlève (S_t, Y_t) . Or N^- vérifie, pour tout borélien B , $N_t^-(B) = |s < S_t : (\tau_{s^-} - \tau_s)/S_t^{1/\alpha} \in B| = M^-([0, S_t] \times (S_t^{1/\alpha} B))$. Le processus défini par $M([0, s] \times s^{1/\alpha} B)$ étant un processus ponctuel de Poisson d'intensité Λ (distribué selon Q), on a donc par changement de variable

$$\mathbb{P}(S_t \in ds, Y_t \in dy, N_t^- \in dn) = \mathbb{1}_{s^{1/\alpha} T < t \leq s^{1/\alpha} T + y} ds \Lambda(dy) Q(N \in dn).$$

pour $T = \int y n(dy)$. De plus $X_t = t/S_t^{1/\alpha} - T(N_t^-)$, donc

$$\mathbb{P}(S_t \in ds, Y_t \in dy, X_t \in dx, N_t^- \in dn) = \mathbb{1}_{t/s^{1/\alpha} \in dx, x \leq y/s^{1/\alpha}} ds \Lambda(dy) Q(N \in dn).$$

Une intégration selon y et s donne alors le résultat. \square

Remarque. Nous avons montré que $\mathbb{V}_t/t \sim \mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$, ce qui implique par conditionnement que si U est une variable aléatoire > 0 p.s., indépendante de B , alors \mathbb{V}_U/U possède également cette même loi. La section 3 donnera, en plus de τ_s et U , d'autres temps T tels que $\mathbb{V}_T/T \sim \mathbb{V}_1$.

De plus, on peut se demander si au lieu de $[0, t]$ on peut considérer la loi de \mathbb{V} pour B restreint à $[a, b]$, pour $0 < a < b$. Cependant on ne retrouve certainement pas la même loi que celle de \mathbb{V}_1 : dans un cas on a une probabilité non nulle que \mathbb{V} ne possède qu'un seul élément, alors que dans l'autre \mathbb{V} en possède une infinité presque sûrement. En revanche, quels que soient $0 < a < b$, on a facilement $\mathbb{V}_{[\tau_a, \tau_b]}/(\tau_b - \tau_a) \sim \mathbb{V}_{\tau_b - a}/\tau_{b-a} \sim \mathbb{V}_t/t$.

2. Réarrangements et « size biased sampling »

Le but de cette partie est de comprendre comment les intervalles formés par les zéros de B sont répartis.

Nous aurons besoin du lemme suivant, liant la loi du brownien avec celle du pont brownien, à temps local fixé. Nous pourrons alors faire le lien entre la loi des longueurs des excursions de B , de son pont et de son « pseudo pont ».

Lemme : « switching identity ». Soit \mathbb{P} la loi du brownien et \mathbb{P}_{0t} la loi du pont brownien sur $[0, t]$. Alors $\mathbb{P}(\cdot \mid \tau_s = t) = \mathbb{P}_{0t}(\cdot \mid S_t = s)$.

Démonstration. Cette relation n'est vraie que modulo des ensembles (de s et t) de mesure nulle. Nous admettons qu'il existe une version de l'espérance conditionnelle telle que le lemme soit vrai pour tous s et t . \square

Lemme. Pour un subordinateur stable τ_s , la loi de \mathbb{V}_t conditionnellement à S_t est la même sous \mathbb{P}_t et \mathbb{P}_{0t} .

Démonstration. Par la switching identity, nous avons $\mathbb{P}_{0,t}(\mathbb{V}_t/t \in \cdot \mid S_t = s) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s \in \cdot \mid \tau_s = t) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s \in \cdot \mid s/\tau_s^\alpha = s/t^\alpha)$. Or d'après le théorème 1 et sa démonstration, on a $(\frac{\mathbb{V}_t}{t}, \frac{S_t}{t^\alpha}) \sim (\frac{\mathbb{V}_{\tau_s}}{\tau_s}, \frac{s}{\tau_s^\alpha})$. Ainsi $\mathbb{P}_{0,t}(\mathbb{V}_t/t \in \cdot \mid S_t = s) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_t/t \in \cdot \mid S_t/t^\alpha = s/t^\alpha) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_t/t \in \cdot \mid S_t = s)$, ce qui est le résultat voulu. \square

Lemme. Soit $B_u^\# = B(u\tau_1)/\sqrt{\tau_1}$ ($0 \leq u \leq 1$) un « pseudo pont », où B est un processus de Bessel de dimension $2(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Alors les lois \mathbb{P}_{01} et $\mathbb{P}_{01}^\#$ vérifient la relation d'absolue continuité

$$\frac{d\mathbb{P}_{01}}{d\mathbb{P}_{01}^\#} = S_1/\mathbb{E}_{0,1}(1/S_1).$$

Démonstration. Biane, Le Gall et Yor [3] ont montré le résultat dans le cas où B est un mouvement brownien, en s'appuyant sur la désintégration

$$\int_0^\infty ds \mathbb{P}^{\tau_s} = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}} \mathbb{Q}^u,$$

où \mathbb{P}^{τ_s} désigne la loi du mouvement brownien arrêté en τ_s et \mathbb{Q}^u celle du pont brownien de longueur u . On peut imiter leur démonstration dans le cas général d'un processus de Bessel de dimension δ .

Le temps local est alors défini par $S_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{1}_{0 \leq B_s \leq \varepsilon} ds / \varepsilon^\delta$. Il suffit de montrer que pour toute fonctionnelle mesurable $F : \mathcal{C}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}(\tau_1^{-\alpha} F(B_u^\#, u \leq 1)) = \mathbb{E}(\tau_1^{-\alpha}) \mathbb{E}(F(B_u^0, u \leq 1)).$$

Or ceci est une conséquence directe de la relation de désintégration

$$\int_0^\infty ds \mathbb{P}^{\tau_s} = K \int_0^\infty u^{\alpha-1} du \mathbb{Q}^u,$$

où K est une constante. En effet, on a alors, pour toutes F et g positives

$$\int_0^\infty \mathbb{E} \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_s}} B(u\tau_s), u \leq 1 \right) g(\tau_s) \right] ds = K \int_0^\infty u^{-\delta/2} \mathbb{E} \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{u}} B_{0u}(uv), v \leq 1 \right) \right] g(u) du,$$

donc par scaling

$$\int_0^\infty \mathbb{E} \left[F(B_u^\#, u \leq 1) g(s^{1/\alpha} \tau_1) \right] ds = K \int_0^\infty u^{-\delta/2} \mathbb{E} [F(B_{01}(v), v \leq 1)] g(u) du,$$

et enfin par changement de variable $u = s^{1/\alpha}\tau_1$ (justifié facilement en passant par le théorème de Fubini) on obtient $\mathbb{E}(\tau_1^{-\alpha}F(B_u^\#, u \leq 1)) = \mathbb{E}(\tau_1^{-\alpha})\mathbb{E}(F(B_u^0, u \leq 1))$, ce qui est le résultat voulu.

Il nous reste à prouver la relation de désintégration. Nous renvoyons pour cela à Revuz et Yor chapitre VI exercice 2.29 [15], où le cas brownien est traité. Dans le cas d'un processus de Bessel, la démonstration est en tout point identique, sauf que la probabilité de transition 0 à y n'est pas en $t^{-1/2}$ mais en $t^{-\delta/2}$ (cf annexe). \square

Pour comprendre l'ordre dans lequel apparaissent les éléments de \mathbb{V}_t et \mathbb{V}_{τ_s} , introduisons les notations suivantes.

- Q la loi d'un Bessel standard
- $Q^s = Q(\cdot \mid S_1 = s)$
- Q_0 la loi d'un pont de Bessel standard : $Q_0 = Q(\cdot \mid B_1 = 0)$
- $Q_0^s = Q_0(\cdot \mid S_1 = s) = Q(\cdot \mid B_1 = 0, S_1 = s)$

Ces conditionnements par des événements de mesure nulle ne sont ici pas difficiles à justifier car on a une écriture explicite des processus auxquels ils correspondent (tels que le pont de Bessel).

Soit ν la Q -distribution de S_1 et ν_0 sa Q_0 -distribution. Si on définit, pour toute mesure μ sur $[0, \infty[$, $Q^\mu = \int Q^s \mu(ds)$, alors on a $Q^\nu = Q$ et $Q^{\nu_0} = Q_0$.

Notons désormais $[R_n, L_n]$ l'intervalle correspondant à une excursion de longueur V_n . Notre but est de connaître la loi de $(R_n)_{n \geq 0}$ (par exemple), conditionnellement à \mathbb{V} . Introduisons alors

$$U_n = \frac{S_{R_n}}{S_1}.$$

Alors $U_n < U_m$ signifie que l'intervalle correspondant à V_n est situé à gauche de celui correspondant à V_m . On a de plus

$$R_m = \sum_n \mathbb{1}_{U_n \leq U_m} V_n,$$

donc pour connaître la loi des R_i conditionnellement à \mathbb{V} , il suffit de connaître la loi des U_i . C'est ce que nous apporte le théorème suivant.

Théorème 2 : loi de l'ordre des intervalles, pour \mathbb{V} donné. Soit μ une distribution sur $[0, \infty[$.

1. La loi de \mathbb{V} est identique sous Q^μ et sous Q_0^μ .
2. Sous Q_0^μ , les variables aléatoires U_1, \dots, U_n, \dots sont indépendantes, indépendantes de \mathbb{V} et de loi uniforme sur $[0, 1]$.
3. Sous Q^μ , il existe un unique indice N tel que $U_N = 1$, choisi par « size biased sampling » : $Q^\mu(N = n \mid \mathbb{V}) = V_n$. Les variables aléatoires $U_1, \dots, U_{n-1}, U_{n+1}, \dots$ sont alors indépendantes, indépendantes de \mathbb{V} et N et de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration. (1) Pour $\mu = \delta_s$, il s'agit du second lemme. Le résultat est alors immédiat en conditionnant par s .

(2) De même que précédemment, il suffit de considérer le cas $\mu = \delta_s$, pour $0 < s < \infty$, c'est-à-dire la loi Q'_0 sachant $S_1 = s$. Or S_1 est une fonction de \mathbb{V} , donc il suffit de montrer le résultat sous Q'_0 . Or Q'_0 est la loi du pseudo pont d'après le lemme précédent, donc il nous suffit de montrer par changement d'échelle que pour $(B_u, 0 \leq u \leq \tau_1)$, on a les $V_n := S_{R_n}/S_{\tau_1} = S_{R_n}$ uniformes et indépendants (y compris de \mathbb{V}). Or les S_{R_i} sont exactement les instants des sauts de taille V_i d'un processus ponctuel de Poisson, donc on sait que les moments des sauts sont équiprobables et indépendants les uns des autres, ce qui est le résultat souhaité.

(3) Sous Q , on a un dernier intervalle $(L_n, R_n) = (G_1, 1)$, où G_1 est le dernier zéro de B avant 1. Par le théorème 1 on sait que $Q(N = n \mid \mathbb{V}) = V_n$. Étant donné N , si on considère le processus B restreint à $[0, G_1]$, on sait qu'il s'agit d'un pont brownien de longueur G_1 . On peut donc appliquer le résultat de (2) à ce pont et on obtient le résultat voulu pour $\mu = \nu$ tout d'abord, puis pour tout μ en conditionnant selon S_1 . \square

Remarque : interprétation du théorème. La partie (1) du théorème montre que la loi de \mathbb{V} est la même dans le cas d'un processus de Bessel sur $[0, t]$ ou un pont de Bessel sur ce même intervalle; ceci n'est vrai que pour les longueurs ordonnées bien sûr, pas pour l'ensemble des zéros car dans le premier cas t est isolé des zéros alors que ce n'est pas le cas pour le pont. La partie (2) montre qu'une fois \mathbb{V} fixé, toutes les permutations de ces intervalles sont équiprobables pour reconstituer l'ensemble des zéros, dans le cas du pont brownien : pour les n plus longs V_i , les $n!$ ordres d'apparition sont équiprobables.

Dans le cas de B sur $[0, t]$, la loi de l'ordre des V_i (pour \mathbb{V} donné) est un peu plus compliquée : un des éléments de \mathbb{V} doit être choisi par « size biased sampling » pour être le dernier intervalle $[G_1, 1]$, les autres étant ordonnés façon purement aléatoire.

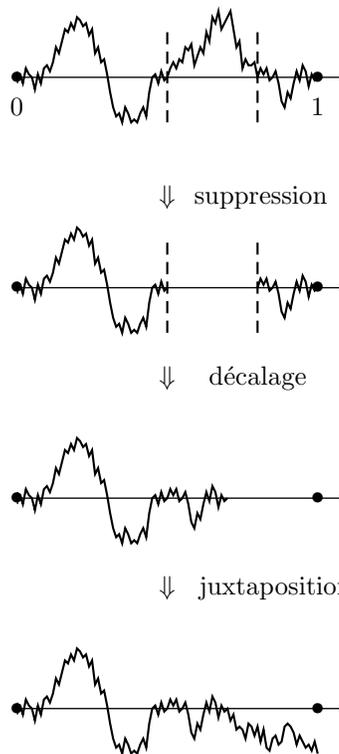
La remarque montre une façon de générer, à partir de X de loi Q^μ , un processus X^* de loi Q^μ : soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de B et $[G_U, D_U] = [L_N, R_N]$ l'intervalle correspondant à l'excursion en U , de longueur Δ . Soit de plus M un méandre standard signé. Alors le processus défini par

$$X_t^* = \begin{cases} X_t & \text{pour } 0 \leq t \leq G_U \\ X_{\Delta+t} & \text{pour } G_U \leq t \leq 1 - \Delta \\ \sqrt{\Delta} M\left(\frac{t+\Delta-1}{\Delta}\right) & \text{pour } 1 - \Delta \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est de loi Q^μ . La justification de ce fait tient dans les remarques suivantes.

- Dans notre construction le dernier intervalle est bien choisi par « size biased sampling ».
- Étant donné l'ensemble des zéros de B , chacune des excursions est indépendante des autres.
- La loi d'un brownien sur $[G_1, 1]$ est celle d'un méandre standard, indépendant du passé de X sur $[0, G_1]$.

Comme X^* a pour loi Q^μ , on a $(X_t^*, 0 \leq t \leq 1 - (D_U - G_U); Q_0^\mu) \sim (X_t, 0 \leq t \leq G_1; Q^\mu)$. Ainsi, pour $\mu = \nu$ on obtient le théorème suivant.



Théorème 3. Soit $B^\#$ un pseudo-pont de Bessel standard, U uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de $B^\#$ et $[G, D]$ l'intervalle correspondant à l'excursion en U . On définit alors

$$B_t^* = \begin{cases} B_t^\# & \text{pour } 0 \leq t \leq G \\ B_{D-G+t}^\# & \text{pour } G \leq t \leq 1 - (D - G) \end{cases}$$

Alors $(B_t^*, 0 \leq t \leq 1 - (D - G)) \sim (B_t, 0 \leq t \leq G_1)$.

Remarque. Ce théorème contient implicitement le théorème 1. En effet, comme $\mathbb{V}(1)$ et $1 - G_1$ sont fonction de $(B_t, 0 \leq t \leq G_1)$, elles ont même loi que les fonctions correspondantes de $(B_t^*, 0 \leq t \leq 1 - (D - G))$, c'est à dire $\mathbb{V}_{\tau_1}/\tau_1$ et $D - G$. Ainsi la loi de $1 - G_1$ conditionnellement à \mathbb{V} est la même que celle de $D - G$ conditionnellement à \mathbb{V} , c'est à dire $\mathbb{P}(D - G = V_i) = V_i$, puis que U est uniforme sur $[0, 1]$.

3. Les temps « admissibles »

Outre les variables aléatoires U indépendantes de $(B_t, t \geq 0)$ et τ_s , il existe d'autres variables aléatoires T telles que

$$\frac{\mathbb{V}_T}{T} \sim \frac{\mathbb{V}_t}{t} \sim \text{PD}(\alpha, 0).$$

Nous rappelons ainsi le résultat de Pitman et Yor [13], qui donnent une large classe de temps T vérifiant la relation précédente. Le temps T est alors appelé « admissible ».

Théorème 4. Soit $c_n \geq 0$ avec $\sum_n c_n < \infty$. Soit

$$A_t = \sum_n c_n V_n(t) + c S_t^{1/\alpha},$$

et $\alpha_u = \inf\{t : A_t > u\}$. Alors α_u est un temps admissible.

La démonstration de ce théorème commence par deux remarques.

- Si une suite de temps admissibles converge en probabilité vers un temps T , alors T est admissible.
- $S_t^{1/\alpha}$ s'écrit, d'après la première représentation de la partie suivante, comme une limite en V_n pour $n \rightarrow \infty$.

Grâce à ces deux remarques, il suffit de montrer le résultat pour une somme finie : $A_t = \sum_{n=1}^k c_n V_n(t)$. La démonstration repose ensuite sur une formule d'absolue continuité trouvée entre $\mathbb{V}(\alpha_1)/\alpha_1$ et \mathbb{V}_1 .

Remarque. Ce théorème montre que τ_s est admissible, mais pas seulement. Par exemple, comme conséquence de ce théorème, les temps $H_m := \inf\{t, V_m(t) > 1\}$ sont admissibles.

Ceci n'est pas vraiment intuitif puisque pour H_1 par exemple la plus longue excursion apparaît en dernier.

Lois de Poisson-Dirichlet : quelques représentations

1. PD($\alpha, 0$) : la loi des excursions

1.1. $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ a pour loi PD($\alpha, 0$)

Soit τ un subordonateur, de mesure de Lévy Λ vérifiant les conditions

$$\Lambda(0, \infty) = \infty, \quad \Delta(1, \infty) < \infty, \quad \int_0^1 x\Lambda(dx) < \infty.$$

On peut alors ordonner les sauts de τ sur $(0, 1)$: $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2 > \dots$. Conformément aux notations des parties précédentes, posons $V_i = \Delta\tau_i/\tau_1$, \tilde{V} une « size biased permutation » de \mathbb{V} et $\tilde{\Delta}\tau$ la permutation de $\Delta\tau$ associée. On définit alors, pour tout $n \geq 1$, $T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{\Delta}\tau_k$ ($0 < T_n < \infty$ p.s.) et $U_n = T_n/T_{n-1}$. Ainsi

$$\tilde{V}_n = U_1 \dots U_{n-1}(1 - U_n) \text{ ps.}$$

Pour montrer que la loi des sauts de τ ordonnés est PD($\alpha, 0$), il nous suffit donc de montrer que les U_n sont indépendants de loi $\beta(n\alpha, 1 - \alpha)$.

Il s'agit précisément d'une partie du théorème suivant, dû à Perman, Pitman et Yor [12], qui explique pourquoi les distributions PD($\alpha, 0$) et PD($0, \theta$) apparaissent naturellement. Nous aurons préalablement besoin du lemme suivant.

Lemme. *Supposons $T = \tau_1$ de densité f , $\Lambda(dx) = \rho(x)dx$ et notons $\Theta(x) = x\rho(x)$. Alors la suite (T, T_1, T_2, \dots) est une chaîne de Markov de probabilité de transition stationnaire*

$$\mathbb{P}(T_1 \in dt_1 \mid T = t) = \frac{\Theta(t - t_1)}{t} \frac{f(t_1)}{f(t)} dt_1.$$

Les densités de (T, T_1, T_2) , puis (T, U_1, U_2) et (T_2, U_1, U_2) sont donc respectivement (on note $\bar{u} = 1 - u$)

$$\begin{cases} f(t, t_1, t_2) &= \frac{\Theta(t-t_1)}{t} \frac{\Theta(t_1-t_2)}{t_1} f(t_2) \\ g(t, u_1, u_2) &= \Theta(\bar{u}_1 t) \Theta(u_1 \bar{u}_2 t) f(u_1 u_2 t) \\ h(t_2, u_1, u_2) &= \frac{1}{u_1 u_2} \Theta\left(\frac{\bar{u}_1 t_2}{u_1 u_2}\right) \Theta\left(\frac{\bar{u}_2 t_2}{u_2}\right) f(t_2) \end{cases}.$$

De plus, on a des formules analogues pour les densités $n+1$ -dimensionnelles de (T, T_1, \dots, T_n) , (T, U_1, \dots, U_n) et (T_n, U_1, \dots, U_n) .

Démonstration. Soit $\Delta\tau^-$ la mesure ponctuelle de poisson associée aux sauts de τ , à laquelle on enlève $\tilde{\Delta}\tau_1$. Soit B un sous-ensemble mesurable du simplexe. Alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tilde{\Delta}\tau_1 \in dx, T_1 \in dt_1, \Delta\tau^- \in B) \\ &= \mathbb{P}(\exists \Delta\tau_i \in dx) \mathbb{P}(\tilde{\Delta}\tau_1 \in dx \mid \exists \Delta\tau_i \in dx) \mathbb{P}(T_1 \in dt_1, \Delta\tau^- \in B \mid \exists \Delta\tau_i \in dx, \tilde{\Delta}\tau_1 \in dx) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(\exists \Delta\tau_i \in dx) = \rho(x)dx$, $\mathbb{P}(\tilde{\Delta}\tau_1 \in dx \mid \exists \Delta\tau_i \in dx) = x/(x+t_1)$ par « size biased sampling ». Enfin, comme les répartitions des points d'une mesure aléatoire de Poisson dans et en dehors

d'un voisinage de x sont indépendants, on a $\mathbb{P}(T_1 \in dt_1, \Delta\tau^- \in B \mid \exists \Delta\tau_i \in dx, \tilde{\Delta}\tau_1 \in dx) = \mathbb{P}(T \in dt_1, \Delta\tau \in B)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\tilde{\Delta}\tau_1 \in dx, T_1 \in dt_1, \Delta\tau^- \in B) = \rho(x) dx \frac{x}{x+t_1} \mathbb{P}(T \in dt_1, \Delta\tau \in B). \quad (1)$$

Cette relation montre que la loi de $\Delta\tau^-$ sachant T et $T_1 = t_1$ est égale à la loi de $\Delta\tau$ sachant $T = t_1$. De plus, étant donné $\Delta\tau^-$, la suite $(T_n)_{n \geq 2}$ est obtenue par la même procédure que $(T_n)_{n \geq 1}$ à partir de $\Delta\tau$ (« size biased sampling »). Ainsi la distribution conditionnelle de $(T_n)_{n \geq 2}$ sachant T et $T_1 = t_1$ est la même que celle de $(T_n)_{n \geq 1}$ sachant $T = t_1$: il s'agit de la propriété de Markov recherchée.

La relation (1) implique de plus que l'on a bien la formule annoncée pour $\mathbb{P}(T_1 \in dt_1 \mid T = t)$, puis les trois densités par conditionnement et utilisation de la propriété de Markov, puis par changement de variable. \square

Remarque. On aurait un lemme tout à fait similaire dans le cas plus général de « h -biased sampling ».

Théorème 5. Avec les notations précédentes, on a les résultats suivants.

1. Les variables aléatoires τ_1 et U_1 sont indépendantes si et seulement si T a pour densité

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \lambda^\theta t^{\theta-1} e^{-\lambda t},$$

pour $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ (densité « gamma »). Alors τ_1 et les U_n sont indépendants et les U_n sont de loi $\beta(1, \theta)$: la distribution de \mathbb{V} est PD(0, θ).

2. Les variables aléatoires $\tau_1 - \tilde{\Delta}\tau_1$ et U_1 sont indépendantes si et seulement si τ_1 est de distribution stable d'indice $0 < \alpha < 1$:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_1}) = e^{-c\lambda^\alpha},$$

pour $c > 0$. Alors pour tout n les variables aléatoires $\tau_1 - \tilde{\Delta}\tau_n, U_1, U_2, \dots, U_n$ sont indépendantes et U_n est de loi $\beta(1 - \alpha, n\alpha)$: la distribution de \mathbb{V} est PD($\alpha, 0$).

Démonstration. (1) Si T possède la densité gamma, alors d'après le lemme $g(t, u_1, u_2)$ se factorise après calcul en $s(t)(\theta u_1^{\theta-1})(\theta u_2^{\theta-1})$, donc T, U_1 et U_2 sont indépendants, avec U_1 et U_2 de distribution $\beta(\theta, 1)$. Le même type de factorisation existe pour la densité de (T, U_1, \dots, U_n) .

Réciproquement, si T et U_1 sont indépendants, alors d'après le lemme on doit pouvoir écrire $g(t, u_1) = \Theta(\bar{u}_1 t) f(u_1 t) = \phi(u_1) f(t)$. Mais alors $g(t, u_1, u_2) = \Theta(\bar{u}_1 t) \Theta(u_1 \bar{u}_2 t) f(u_1 u_2 t) = \Theta(\bar{u}_1 t) \phi(u_2) f(u_1 t) = \phi(u_1) \phi(u_2) f(t)$ etc. Ceci montre que T et tous les U_i sont indépendants.

Pour montrer que T est alors de loi gamma, utilisons le critère de Lukacs, montré en annexe : « si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes positives non constantes et si $X + Y$ est indépendant de $X/(X + Y)$, alors X et Y sont de loi gamma de même facteur d'échelle ». Prenons ici $X = \tau_{1/2}$ et $Y = \tau_1 - \tau_{1/2}$ (indépendants car τ est un subordinateur). Si I_n indique que $\tilde{\Delta}\tau_n$ a lieu avant $1/2$, alors les I_n sont deux à deux indépendants de loi de Bernoulli(1/2). De plus $X/(X + Y) = \sum_n I_n U_1 \dots U_n$, donc $X/(X + Y)$ est indépendant de $T = X + Y$; le critère de Lukacs s'applique donc.

(2) Si T est de distribution stable alors $\Theta(x) = Kx^{-\alpha}$ pour une certaine constante K , donc la fonction h du lemme se factorise : pour tout n , T_n, U_1, \dots, U_n sont indépendants.

Réciproquement, si U_1 et T_1 sont indépendants alors on doit avoir une factorisation du type $1/u_1\Theta(\overline{u}_1 t_1/u_1)f(t_1) = f_1(t_1)\phi(u_1)$ pour certaines densités f_1 et ϕ . ceci impose $\Theta(tx) = s(t)u(x)$ pour des fonctions mesurables positives s et u , donc $\Theta(x) = Kx^{-\alpha}$, pour une constante positive K et un $0 < \alpha < 1$ (pour satisfaire les conditions d'intégrabilité de Λ). \square

Remarque. Maintenant que nous savons que la loi de $\mathbb{V}_{\tau_s}/\tau_s$ est $PD(\alpha, 0)$, nous pouvons en déduire des équations fonctionnelles sur la loi de $PD(\alpha, 0)$.

En effet, pour deux suites décroissantes u et v , notons $Réord(u, v)$ (pour « réordonnement ») la suite décroissante telle que les éléments de u et v en forment une partition.

Soient $s_1 > 0$ et $s_2 > 0$. Pour un processus de Bessel de dimension $2(1 - \alpha)$, les longueurs décroissantes des excursions jusqu'à $\tau_{s_1+s_2}$ est alors le réordonnement de ces longueurs sur les intervalles $(0, \tau_{s_1})$ et $(\tau_{s_1}, \tau_{s_1+s_2} - \tau_{s_1})$. Comme τ est à accroissements indépendants, les longueurs sur ces deux intervalles sont indépendantes. Comme de plus ces longueurs normalisées ont la même loi $PD(\alpha, 0)$, indépendante de s_1 et s_2 , on en déduit l'équation fonctionnelle suivante pour la loi $PD(\alpha, 0)$. Soient des variables aléatoires indépendantes P, P_1, P_2 de loi $PD(\alpha, 0)$, τ_u de loi $\mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_u}) = e^{-u\lambda^\alpha}$; alors

$$Réord(\tau_{s_1}P_1, \tau_{s_2}P_2) \sim (\tau_{s_1} + \tau_{s_2})P.$$

Je ne sais pas si cette équation fonctionnelle est suffisante pour caractériser la loi de Poisson-Dirichlet $PD(\alpha, 0)$. Cette relation est difficilement exploitable pour étudier la loi des éléments de P , excepté pour le plus grand élément M :

$$\max\{\tau_{s_1}M_1, \tau_{s_2}M_2\} \sim (\tau_{s_1} + \tau_{s_2})M.$$

Ici aussi, cette équation fonctionnelle caractérise peut-être la loi de M .

1.2. Autres représentations de la loi $PD(\alpha, 0)$

Première représentation. Soit \mathbb{V} de distribution $PD(\alpha, 0)$, pour $0 < \alpha < 1$. Alors :

1. on peut écrire

$$V_n = \frac{X_n^{-1/\alpha}}{\sum_{m=1}^{\infty} X_m^{-1/\alpha}},$$

où $X_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$, avec les ε_i indépendantes de loi exponentielle standard.

2. la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} nV_n^\alpha$ existe presque sûrement.

Démonstration. Nous savons que $\mathbb{V}_{\tau_1}/\tau_1$ est de loi $PD(\alpha, 0)$ pour un subordonateur α -stable, de mesure de Levy $\Lambda_\alpha[x, \infty[= Cx^{-\alpha}$. Il nous suffit donc de montrer les assertions dans le cas où $\mathbb{V} = \mathbb{V}_{\tau_1}/\tau_1$.

On sait que $(\tau_1 V_n, n \geq 0)$ sont les points d'une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $\Lambda_\alpha(dx)$ sur $]0, \infty[$. Ainsi $X_n := C(\tau_1 V_n)^{-\alpha}$ sont les points d'une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité dx sur $]0, \infty[$, par simple changement de variable. Les $\varepsilon_n = X_n - X_{n-1}$ sont donc des variables exponentielles standard indépendantes, ce qui prouve 1.

De plus, $C\tau_1^{-\alpha}(nV_n^\alpha)^{-1} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i/n$ converge vers 1 p.s. par la loi des grands nombres, donc $nV_n^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C\tau_1^{-\alpha}$, ce qui prouve 2. \square

Seconde représentation. Soit \mathbb{V} de distribution $PD(\alpha, 0)$, pour $0 < \alpha < 1$. Soit $R_n = V_{n+1}/V_n$. Alors R_n est de distribution $\beta(n\alpha, 1)$ et les R_i sont indépendants.

Démonstration. En utilisant la première représentation la preuve est élémentaire : on a $R_n = (X_n/X_{n+1})^{1/\alpha}$. Il suffit donc de montrer que si les X_i sont les instants de sauts d'un processus de Poisson homogène, alors les X_n/X_{n+1} sont indépendants de loi $\beta(n, 1)$, ce qui est élémentaire. \square

Remarque. Comme conséquence immédiate on a la représentation suivante : si les R_n sont deux à deux indépendants et de loi $\beta(n\alpha, 1)$, alors en posant

$$\begin{cases} V_1 &= \frac{1}{1+R_1+R_1R_2+R_1R_2R_3+\dots} \\ V_{n+1} &= \frac{1}{V_1R_1R_2\dots R_n} \end{cases},$$

\mathbb{V} a pour loi $\text{PD}(\alpha, 0)$.

2. Formule d'absolue continuité entre $\text{PD}(\alpha, 0)$ et $\text{PD}(\alpha, \theta)$.

Nous connaissons désormais plusieurs façons de calculer la loi $\text{PD}(\alpha, 0)$ et nous pouvons en déduire la densité de $\text{PD}(\alpha, \theta)$ grâce au théorème suivant, donné sans démonstration, qui est une conséquence directe du corollaire 3.15 de [9].

Théorème 6 : absolue continuité entre $\text{PD}(\alpha, 0)$ et $\text{PD}(\alpha, \theta)$. *Si τ est un subordonateur stable de paramètre α et \mathbb{V} de loi $\text{PD}(\alpha, \theta)$, alors pour toute fonction mesurable positive f*

$$\mathbb{E}_{\alpha, \theta}(f(\mathbb{V})) = K \mathbb{E}_{\alpha, 0}\left(\frac{1}{\tau_1^\theta} f\left(\frac{\mathbb{V}_{\tau_1}}{\tau_1}\right)\right),$$

où $K = c^{\theta/\alpha} \Gamma(\theta + 1) \Gamma(1 - \alpha)^{\theta/\alpha} / \Gamma(\theta/\alpha + 1)$.

Pour avoir la densité k -dimensionnelle de $\text{PD}(\alpha, \theta)$, il suffit donc de connaître la loi jointe de $(\tau_1, V_1, \dots, V_k)$ pour un subordonateur α -stable. La formule de Perman présentée en paragraphe 4, permet d'avoir ce résultat.

Ces lois fini-dimensionnelles sont présentées dans [14].

3. Processus associé à $\text{PD}(\alpha, \theta)$

De même que $\text{PD}(\alpha, 0)$ correspond à la loi des longueurs des excursions réordonnées d'un subordonateur α -stable, on peut se demander s'il n'existe pas une telle représentation pour la loi $\text{PD}(\alpha, \theta)$. La réponse est oui et on peut construire explicitement un tel subordonateur comme le montre le théorème suivant, prouvé dans [14].

Théorème 7. *Soit $0 < \alpha < 1$ et $c > 0$. Soit $(\tau_s)_{s \geq 0}$ un subordonateur de mesure de Lévy $c\alpha x^{-\alpha-1} e^{-x} dx$. Indépendamment de τ , soit γ un gamma-subordonateur (de mesure de Lévy $x^{-1} e^{-x} dx$).*

Alors la suite ordonnée/normalisée des longueurs des excursions de τ prises jusqu'au temps aléatoire $s_{\alpha, \theta} = \gamma(\theta/\alpha)/(c\Gamma(1 - \alpha))$ a pour loi $\text{PD}(\alpha, \theta)$. De plus, elle est indépendante de la variable aléatoire $T = \tau_{s_{\alpha, \theta}}$, qui est de loi $\gamma(\theta)$.

La démonstration de ce théorème provient fondamentalement de la remarque suivante. Soit $K = c\Gamma(1 - \alpha)$ et σ_s un subordonateur α -stable avec $\mathbb{E}(e^{-\lambda\sigma_s}) = e^{-Ks\lambda^\alpha}$. La mesure de Lévy de

τ a pour densité e^{-x} par rapport à celle de σ , donc pour toute fonctionnelle positive mesurable F

$$\mathbb{E}(F(\tau_t, 0 \leq t \leq s)) = e^{Ks} \mathbb{E}(F(\sigma_t, 0 \leq t \leq s)e^{-\sigma_s}).$$

Grâce à cette formule on passe de la loi de τ à celle d'un subordonateur α -stable, puis avec la formule d'absolue continuité on a le lien avec $PD(\alpha, \theta)$.

Remarque. Contrairement à la formule d'absolue continuité, on a bien ici des limites lorsque $\alpha \rightarrow 0$ pour θ fixé (en prenant $c = 1/\alpha$). On retrouve alors bien la distribution de Kingman : la mesure de Lévy de τ tend vers $x^{-1}e^{-x}dx$ et $s_{\alpha, \theta}$ vers θ par la loi des grands nombres.

4. Lois finidimensionnelles : la formule de Perman

Soit \mathbb{V} la suite décroissante normalisée (pour que la somme fasse 1) des sauts d'un subordonateur τ de mesure de Lévy admettant une densité $h(x)dx$. On note dans la suite $\bar{v}_n = 1 - (v_1 + \dots + v_{n-1})$.

Théorème 8 : la formule de Perman [8]. Avec les notations précédentes, pour tout $n \geq 2$, $(\tau_1, V_1, \dots, V_n)$ admet pour densité

$$p_n(t, v_1, \dots, v_n) = h(tv_1) \dots h(tv_{n-1}) \frac{t^{n-1}}{\bar{v}_n} p_1\left(t\bar{v}_n, \frac{v_n}{\bar{v}_n}\right),$$

où p_1 vérifie de plus l'équation intégrale (pour $t > 0$ et $0 < u < 1$)

$$p_1(t, v) = t h(tv) \int_0^{v/(1-v) \wedge 1} p_1(t(1-v), u) du.$$

La preuve de ce théorème repose sur le fait suivant : si on considère le subordonateur τ' défini comme τ auquel on enlève les n plus grands sauts, alors la loi de τ' conditionnellement à (V_1, \dots, V_n) est celle d'un subordonateur de mesure de Lévy celle de τ restreinte à $(0, V_n)$. Ceci résulte des propriétés d'indépendance des processus ponctuels de Poisson et donne facilement la première équation.

Pour obtenir l'équation fonctionnelle de p_1 , il suffit de constater que c'est la première marginale de p_2 , pour laquelle on utilise la formule précédente.

Remarque. On voit facilement que l'équation intégrale de Perman pour p_1 détermine cette fonction de manière unique, en se restreignant successivement aux cas où $v \in]1/2, 1[$, $v \in]1/3, 1/2]$, $v \in]1/4, 1/3]$ etc.

Le théorème de Billingsley

1. Énoncé

Pour un entier m , on note :

- $\vec{p}_k(m)$ le vecteur des k plus grands facteurs premiers distincts de m , $p_1 > \dots > p_k$ (avec certains termes éventuellement égaux à 1 si m a moins de k facteurs premiers distincts) ;
- $\vec{q}_k(m)$ le vecteur des k plus grands facteurs premiers (éventuellement répétés) de m , $q_1 \geq \dots \geq k$ (avec certains termes éventuellement égaux à 1 si m a moins de k facteurs premiers) ;
- $\vec{P}_k(m) = (\log p_1(m)/\log m, \dots, \log p_k(m)/\log m)$;
- $\vec{Q}_k(m) = (\log q_1(m)/\log m, \dots, \log q_k(m)/\log m)$.

Voici l'énoncé du théorème tel qu'il est proposé par Billingsley [5].

Théorème 9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons $\vec{m} = \log m / \log \vec{p}_k(m)$. Alors, il existe une mesure μ sur $[0, 1]^k$ telle que pour tout borélien B de $[0, 1]^k$

$$\frac{1}{n} |\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket : \vec{m} \in B\}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(B).$$

De plus, la mesure μ possède une densité définie comme suit.

- Soit $H_v(x) = \int_{U_v} \prod_{i=1}^v dt_i/t_i$, où $U_v = \{1 < t_1 < \dots < t_v < x : \sum_{i=1}^v 1/t_i < 1\}$.
- Alors la marginale de μ restreinte à la première coordonnée a pour densité $f(x) = x^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v H_v(x-1)$.
- La mesure μ a alors pour densité

$$f(x_1, \dots, x_k) = \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}\right) \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{x_i}\right) f \left[x_k \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}\right) \right].$$

Remarque. Grâce au théorème de Perman précédemment vu, après quelques calculs on reconnaît pour les $1/x_i$ la loi PD(0, 1). Le théorème de Billingsley peut donc s'énoncer comme suit.

La loi \mathbb{P}^n définie par $\mathbb{P}^n(B) = \frac{1}{n} |\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket : \vec{P}_k(m) \in B\}|$ converge faiblement vers PD(0, 1).

La démonstration originelle de Billingsley repose sur des comparaisons série-intégrale et n'utilise que la propriété arithmétique suivante : $\sum_{p \in \mathcal{P} \cap \llbracket 1, n \rrbracket} 1/p = \log \log n + c + o(1)$.

Nous lui préférons ici la démonstration suivante, due à Donnelly et Grimmett [6], plus probabiliste et qui fait apparaître la notion de « size biased sampling ». De plus elle n'utilise

que la relation arithmétique $\sum_{p \in \mathcal{P} \cap [1, n]} \log p/p = \log n + O(1)$, légèrement moins difficile à montrer que la précédente.

2. Démonstration de Donnelly et Grimmett

Soit $N(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\gamma_{p,n}}$ un entier choisi uniformément dans $[1, n]$. On pose $M(n) = \sum_p \gamma_{p,n}$ le nombre de facteurs premiers de $N(n)$ (comptés avec multiplicité).

Soit ensuite $(\tilde{q}_i(n))_{1 \leq i \leq M(n)}$ une « h -biased permutation » de la suite des facteurs premiers $q_1(n) \geq \dots \geq q_{M(n)}(n)$ de $N(n)$, avec la fonction $h(x) = \log x$:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{q}_1(n) = q_i(n)) & = \frac{\gamma_{q_i(n), n} \log q_i(n)}{\log N(n)} \\ \mathbb{P}(\tilde{q}_l(n) = q_i(n) \mid N(n), \tilde{q}_1(n), \dots, \tilde{q}_{l-1}(n)) & = \frac{\gamma_{q_i(n), n} \log q_i(n)}{\log R_l(n)} \end{cases}$$

où $\gamma_{p,n}^k = \max\{0, \gamma_{p,n} - |i < k : q_i(n) = p|\}$ et $R_l(n) = N(n)/(\tilde{q}_1(n) \dots \tilde{q}_{l-1}(n))$. On pose de plus

$$B_i(n) = \begin{cases} \frac{\log \tilde{q}_i(n)}{\log R_i(n)} & \text{si } 1 \leq i \leq M(n) \\ 0 & \text{si } i > M(n) \end{cases}$$

Dans la suite, on écrira « $\vec{B}(n)$ » pour les k premières coordonnées B_1, \dots, B_k , où k est spécifié par le contexte. On a alors la proposition centrale suivante.

Proposition. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $\vec{B}(n)$ converge faiblement vers la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^k$.*

Avant de montrer cette proposition, voyons pourquoi il implique la convergence faible de $\vec{Q}_k(N(n))$ vers la loi PD(0, 1). Supposons son résultat juste et considérons le vecteur $\vec{C}(n)$ défini par

$$C_i(n) = \begin{cases} \frac{\log \tilde{q}_i(n)}{\log N(n)} & \text{si } 1 \leq i \leq M(n) \\ 0 & \text{si } i > M(n) \end{cases}$$

Alors on peut vérifier facilement que

$$C_1(n) = B_1(n), \quad C_2(n) = (1 - B_1(n))B_2(n), \quad C_3(n) = (1 - B_1(n))(1 - B_2(n))B_3(n) \dots$$

Comme la loi de $\vec{B}(n)$ tend vers une loi uniforme, celle de $\vec{C}(n)$ tend vers l'image de cette loi par l'application précédente, c'est-à-dire exactement la loi GEM de paramètre 1. On en déduit que la loi de $\vec{Q}_k(N(n))$, qui n'est rien d'autre que le réordonnement de $\vec{C}(n)$, tend vers l'image de GEM par réordonnement, c'est à dire PD(0, 1) par définition. On peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 10. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $N(n)$ un entier tiré au hasard uniformément dans $[1, n]$. Alors la loi de $(\log q_1(N(n))/\log N(n), \dots, \log q_k(N(n))/\log N(n))$ tend vers celle des k premières coordonnées de PD(0, 1).*

Démonstration de la proposition. Nous voulons montrer que pour tous $\vec{a}, \vec{b} \in]0, 1[^k$ avec $\vec{a} < \vec{b}$, on a $\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$.

Première étape. Il nous suffit en réalité de montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) \geq \prod_{i=1}^k (b_i - a_i). \quad (1)$$

En effet, si ce n'était pas suffisant, on pourrait trouver $\vec{c} < \vec{d}$ dans $[0, 1]^k$ avec $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\vec{c} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{d}) > \prod_{i=1}^k (d_i - c_i)$. Si nous partitionnons le cube unité en r cubes \mathcal{C}_i , dont un serait $\mathcal{C}_1 = \prod_{i=1}^k [c_i, d_i]$, nous aurions donc (en notant λ la mesure de Lebesgue)

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(\vec{B}(n) \in \mathcal{C}_i) \geq \sum_{i=2}^r \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\vec{B}(n) \in \mathcal{C}_i) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\vec{B}(n) \in \mathcal{C}_1) \\ &\geq \sum_{i=2}^r \lambda(\mathcal{C}_i) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\vec{B}(n) \in \mathcal{C}_1) > \sum_{i=2}^r \lambda(\mathcal{C}_i) + \lambda(\mathcal{C}_1) > 1, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. Il nous suffit donc de montrer (1).

Seconde étape. Remarquons que la condition $\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}$ s'écrit aussi, pour tout $1 \leq i \leq k$, $R_i(n)^{a_i} \leq \tilde{q}_i(n) \leq R_i(n)^{b_i}$, où $R_i(n) = N(n)/(\tilde{q}_1(n) \dots \tilde{q}_{i-1}(n))$, donc

$$\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) = \sum_{\Omega} \mathbb{P}(N(n) = m, \forall 1 \leq i \leq k \tilde{q}_i(m) = p_i)$$

$$\text{où } \Omega = \left\{ (m, p_1, \dots, p_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathcal{P}^k : \forall 1 \leq i \leq k, \left(\frac{m}{p_1 \dots p_{i-1}} \right)^{a_i} \leq p_i \leq \left(\frac{m}{p_1 \dots p_{i-1}} \right)^{b_i} \right\}.$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$ et posons

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (m, p_1, \dots, p_k) \in \llbracket \varepsilon n, n \rrbracket \times \mathcal{P}^k : \forall 1 \leq i \leq k, \left(\frac{n}{p_1 \dots p_{i-1}} \right)^{a_i} \leq p_i \leq \left(\frac{\varepsilon n}{p_1 \dots p_{i-1}} \right)^{b_i} \right\}.$$

Alors $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, donc $\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) \geq \sum_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{P}(N(n) = m, \forall 1 \leq i \leq k \tilde{q}_i(m) = p_i)$. De plus, comme les \tilde{q}_i sont choisis par « log-biased sampling », on a pour tous les éléments de Ω'

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(n) = m, \forall 1 \leq i \leq k \tilde{q}_i(m) = p_i) &= \mathbb{1}_{p_1 \dots p_k | m} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k \frac{\gamma_{p_i, n} \log p_i}{\log(m/(p_1 \dots p_{i-1}))} \\ &\geq \mathbb{1}_{p_1 \dots p_k | m} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k \frac{\log p_i}{\log(m/(p_1 \dots p_{i-1}))} \geq \mathbb{1}_{p_1 \dots p_k | m} \frac{1}{n} \prod_{i=1}^k \frac{\log p_i}{\log(n/(p_1 \dots p_{i-1}))}. \end{aligned}$$

Posons, pour $\vec{p} = (p_1, \dots, p_k)$ donné, $n_i = n/(p_1 \dots p_{i-1})$. Alors, en sommant l'expression précédente sur tous les éléments m de Ω_ε multiples de $p_1 \dots p_k$, on obtient

$$\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) \geq \sum_{\vec{p} | \exists m: (m, \vec{p}) \in \Omega_\varepsilon} \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{n_{k+1}} \right) \prod_{i=1}^k \frac{\log p_i}{p_i \log n_i}.$$

Comme, pour tout i , $n_{i+1} = n_i/p_i \geq n_i/(\varepsilon n_i)^{b_i} > n_i^{1-b_i}$, on a $n_{i+1} > n^\nu$ où $\nu = \prod_{i=1}^k (1 - b_i) > 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}(n) \leq \vec{b}) \geq \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{n^\nu} \right) \sum_{\vec{p} | \exists m: (m, \vec{p}) \in \Omega_\varepsilon} \prod_{i=1}^k \frac{\log p_i}{p_i \log n_i}. \quad (2)$$

Troisième étape. On utilise ici le résultat arithmétique suivant : $\sum_{p \in \mathcal{P} \cap \llbracket 1, K \rrbracket} \log p/p = \log K + O(1)$. On a donc, pour un certain $M > 0$, $\sum_{m^{a_i} \leq p \leq (\varepsilon m)^{b_i}} \frac{\log p}{p \log m} \geq b_i - a_i - \varepsilon$ dès que $m > M$, si bien que pour tout $n \geq M^{1/\nu}$

$$\sum_{n_i^{a_i} \leq p \leq (\varepsilon n_i)^{b_i}} \frac{\log p}{p \log n_i} \geq b_i - a_i - \varepsilon.$$

En sommant les termes de (2) selon p_k, p_{k-1}, \dots, p_1 , nous en déduisons que pour $n \geq M^{1/\nu}$

$$\mathbb{P}(\vec{a} \leq \vec{B}_k(n) \leq \vec{b}) \geq \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{n^\nu}\right) \prod_{i=1}^k (n_i - a_i - \varepsilon).$$

On obtient alors la minoration souhaitée de la lim inf pour $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Remarque. Parmi les propriétés intéressantes impliquées par ce théorème, si m est distribué uniformément dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\mathbb{P}(q_1(m) \dots q_k(m) > m^b)$ admet une limite finie $f(k, b) \in]0, 1[$ pour tout $b \in]0, 1[$.

3. Équivalence des deux théorèmes

La démonstration précédente donne la distribution asymptotique des facteurs premiers comptés avec leur multiplicité. Ceci n'est donc pas exactement le théorème de Billingsley. Cependant, on peut facilement passer du résultat de Donnelly et Grimmett à celui de Billingsley. Pour le montrer, commençons par le lemme suivant.

Lemme. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit \mathcal{N} l'ensemble des entiers $n > 1$ tels qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ avec $p^2 \mid n$ et p parmi les k plus grands facteurs premiers de n . Alors \mathcal{N} est de densité nulle dans \mathbb{N} .

Démonstration. Soit $l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. D'après le théorème de Donnelly et Grimmett, la loi limite de $\vec{Q}_k(N(n))$ admet un densité $f(x_1, \dots, x_k)$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_l(N(n)) = q_{l+1}(N(n))) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|q_l(N(n)) - q_{l+1}(N(n))| < \varepsilon) \\ &= \int \mathbf{1}_{|x_l - x_{l+1}| < \varepsilon} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q_l(N(n)) = q_{l+1}(N(n))) = 0$. L'ensemble \mathcal{N}_l des entiers tels que $q_l = q_{l+1}$ est donc de densité nulle et, comme $\mathcal{N} = \cup_{l=1}^{k-1} \mathcal{N}_l$, \mathcal{N} est de densité nulle. \square

On définit $\mathbb{P}^n(A) = 1/n |\{m \in \llbracket 1, n \rrbracket : A\}|$. Alors pour B borélien de $[0, 1]^k$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B) &= \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B, m \in \mathcal{N}) + \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B, m \in \mathbb{C}\mathcal{N}) \\ &= \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B, m \in \mathcal{N}) + \mathbb{P}^n(\vec{P}_k(m) \in B, m \in \mathbb{C}\mathcal{N}) \\ \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B) &= \mathbb{P}^n(\vec{Q}_k(m) \in B, m \in \mathcal{N}) + \mathbb{P}^n(\vec{P}_k(m) \in B) - \mathbb{P}^n(\vec{P}_k(m) \in B, m \in \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Grâce à notre lemme, en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, on voit que la distribution asymptotique de \vec{Q}_k est identique à celle de \vec{P}_k : les résultats de Billingsley et Donnelly-Grimmett sont équivalents.

Remarque. Cette équivalence montre que les distributions finies de PD(0, 1) coïncident avec celles données par Billingsley, sans passer par le théorème de Perman.

Annexes

1. Processus de Bessel et subordonateurs stables

Le but de cette annexe est de comprendre comment sont construits les temps locaux associés aux processus de Bessel R de dimension $\delta \in]0, 2[$ (on note $\delta = 2(1 - \alpha)$), puis la propriété de stabilité de leur inverse τ_s .

Les résultats sont donnés sans démonstration, on peut trouver cette dernière dans [15].

Définition des processus de Bessel. *Un processus carré de Bessel de dimension $\delta \geq 0$ (issu de 0) est la solution de l'équation différentielle stochastique*

$$Z_t = 2 \int_0^t \sqrt{|Z_s|} d\beta_s + \delta t.$$

Un processus de Bessel R de dimension δ est la racine carrée d'un processus carré de Bessel de dimension δ .

Cette définition est consistante : on a unicité de la solution, due au caractère 1/2-höldérien de $\sqrt{\cdot}$.

Propriétés de polarité. *On a les cas de polarité suivants pour un processus de Bessel de dimension δ .*

- Pour $0 \leq \delta < 2$ le point 0 est atteint presque sûrement. Pour $\delta = 0$ il est absorbant et sinon instantanément réfléchissant
- Pour $\delta \geq 2$ le point 0 est polaire.

De plus R n'est une semimartingale que pour $\delta \geq 1$.

Définition du temps local d'un processus de Bessel. *Soit R un processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1 - \alpha)$ ($0 < \alpha < 1$).*

- *Il existe un unique processus croissant continu $(L_t, t \geq 0)$ tel que $R_t^{2\alpha} - L_t$ soit une martingale. De plus L est porté par les zéros de $(R_t, t \geq 0)$.*
- *Il existe une famille bicontinue $(L_t^x, t \geq 0, x \geq 0)$ vérifiant $L_t^0 = L_t$ et la formule d'occupation $\int_0^t h(R_s) ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty h(x) L_t^x x^{1-2\alpha} dx$, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.*

Pour $x > 0$ on a de plus $L_t^x = \alpha x^{2\alpha-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^t \mathbf{1}_{x \leq R_s \leq x+\varepsilon} ds$.

Probabilité de transition d'un processus de Bessel. *Pour B de dimension δ , on a*

$$p_t^\delta(x, y) = \frac{1}{t} \left(\frac{x}{y} \right)^{\delta/2-1} y e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} I_{\delta/2-1} \left(\frac{xy}{t} \right),$$

$$p_t^\delta(0, y) = 2^{1-\delta/2} \Gamma(\delta/2) t^{-\delta/2} y^{\delta-1} e^{-\frac{y^2}{2t}}$$

où I_u est la fonction de Bessel de paramètre u .

L'inverse du temps local en 0 est α -stable. Pour la définition donnée précédemment du temps local L_t^0 , en notant son inverse $\tau_s = \inf\{t \geq 0 \mid L_t^0 \geq s\}$, alors pour tout $a > 0$

$$(\tau_s, s \geq 0) \sim (a\tau_{s/a^\alpha}, s \geq 0).$$

Ceci implique immédiatement $\mathbb{E}(e^{-\lambda\tau_s}) = e^{-cs\lambda^\alpha}$, où $c > 0$.

La méthode donnée par Molchanov et Ostrowski [7] pour prouver ce résultat est la suivante : grâce à un résultat de Skorokhod [16] il suffit de prouver que $\mathbb{P}(\tau_{as} < t) = \mathbb{P}(a^{1/\alpha}\tau_s < t)$ pour avoir l'identité en loi des processus (car ils sont croissants à accroissements iid), il suffit donc de prouver que

$$\mathbb{P}(L_t^0 > as) = \mathbb{P}(L_{a^{-1/\alpha}t}^0 > s).$$

Cette égalité est vérifiée car grâce à la formule de densité de transition précédente, Molchanov et Ostrowski ont calculé la loi de L_t^0 (en passant par ses moments) :

$$\mathbb{E}\left(e^{i\lambda L_t^0}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^m t^{m\alpha} \Gamma(\alpha)^m}{\Gamma(1+m\alpha)} = E_{1/\alpha}(i\Gamma(\alpha)t^\alpha \lambda),$$

où $E_{1/\alpha}$ est appelée fonction de Mittag-Leffler. On en déduit que $\mathbb{P}(L_t^0 < u)$ n'est fonction que de u/t^α , d'où le résultat.

2. Le critère de Lukacs

On veut montrer le critère de Lukacs : « si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes positives non constantes et si $X + Y$ est indépendant de $X/(X + Y)$, alors X et Y sont de loi gamma de même facteur d'échelle ».

Soient X et Y des variables aléatoires vérifiant les conditions de l'énoncé. Pour toute variable aléatoire U positive on pose f_U la fonction telle que pour tout $\theta \leq 0$.

$$\mathbb{E}(e^{\theta U}) = e^{f_U(\theta)}$$

Posons $Z = X/(X + Y)$. Par indépendance on peut écrire

$$\mathbb{E}\left(e^{\alpha(X+Y)+\theta Z}\right) = e^{f_X(\alpha)} e^{f_Y(\alpha)} e^{f_Z(\theta)}.$$

En différentiant selon $\partial^2/\partial\theta\partial\alpha$ et en prenant $\theta = 0$ on obtient

$$f_X'(\alpha) = f_Z'(0)(f_X'(\alpha) + f_Y'(\alpha)),$$

si bien qu'il existe une constante $c_1 \in]0, 1[$ telle que

$$\begin{cases} f_X(\alpha) &= c_1 f_{X+Y}(\alpha) \\ f_Y(\alpha) &= (1 - c_1) f_{X+Y}(\alpha) \end{cases}.$$

On a de plus $c_1 = \mathbb{E}(Z)$. En posant $c_2 = \mathbb{E}(Z^2) = f_Z''(0) + c_1^2$ et en appliquant $\partial^4/\partial\theta^2\partial^2\alpha^2$ à l'équation initiale, on obtient

$$f_X''(\theta) + f_X'(\theta)^2 = c_2(f_{X+Y}''(\theta) + f_{X+Y}'(\theta)^2),$$

si bien qu'en utilisant $f_X(\theta) = c_1 f_{X+Y}(\theta)$, on obtient

$$f''_{X+Y}(\theta) = \frac{c_2 - c_1^2}{c_2 - c_1} f'_{X+Y}(\theta)^2.$$

Remarquons qu'ici ni le numérateur ni le dénominateur ne peuvent être nuls car sinon X et Y posséderaient des Dirac.

Or après calcul on peut trouver une variable aléatoire γ de loi gamma telle que

$$\begin{cases} f''_{\gamma}(\theta) &= \frac{c_2 - c_1^2}{c_2 - c_1} f'_{\gamma}(\theta)^2 \\ f'_{\gamma}(0) &= f'_{X+Y}(0) \end{cases},$$

donc $f_{X+Y} = f_{\gamma}$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On en déduit que X + Y est de loi gamma, donc X = $c_1(X + Y)$ et Y = $(1 - c_1)(X + Y)$ sont de loi gamma de même paramètre.