

Distancia al incumplimiento

Los “modelos con barreras” fueron desarrollados para reconciliar dos métodos de cálculo para probabilidades de incumplimiento: un basado en spreads o diferenciales de crédito y otro en el valor de los activos de la empresa. Este es un tema de gran interés para los mercados de derivados de crédito. Aquí, Marco Avellaneda y Jingyi Zhu desarrollan un modelo para el valor de la firma como un proceso estocástico en tiempo continuo y muestran cómo el modelo se puede calibrar numéricamente a datos de mercado

Los derivados de crédito proporcionan protección sintética contra los posibles incumplimientos de bonos y préstamos. El credit default swap (CDS) es un ejemplo básico de derivado de crédito; en un CDS una parte realiza pagos periódicos a la otra a cambio del derecho a recibir un pago notional en caso de que ocurra un evento de crédito. Recientemente, hemos visto aparecer instrumentos de protección “mayorista” de crédito como los first-to-default swaps sobre una cesta de créditos subyacentes. Para la valoración de derivados de crédito es necesario estimar cuán posible es el incumplimiento de la entidad de referencia. Las probabilidades de incumplimiento pueden ser estimadas a partir de los diferenciales de crédito de las emisiones de deuda de la entidad de referencia¹.

Se han propuesto dos tipos de metodologías cuantitativas para la valoración de derivados de crédito: los modelos estructurales, introducidos por Merton (1974) y otros (Black & Cox, 1976, Brennan & Schwartz, 1980, Titman & Totous, 1989, Kim, Ramaswamy & Sundaresan, 1993, Shimko, Jejima & van Deventer, 1993, y Geske, 1977), y los modelos de forma reducida de Duffie y Singleton (1999). Este artículo se enmarca dentro del enfoque estructural y más en concreto se centra en la metodología de “la barrera de incumplimiento” que recientemente han introducido Hull-White (2001). Este artículo se parte del trabajo Hull-White (2001) y lo extiende en varias direcciones.

En primer lugar, vamos a considerar una versión continua del modelo de Hull-White en el que el índice de incumplimiento sigue un proceso de difusión. Y mostraremos cómo, en este marco general, la calibración de la barrera de incumplimiento nos conduce a un nuevo problema de frontera libre para la ecuación diferencial asociada de Fokker-Planck.

En segundo lugar, a la vista de estos resultados, proponemos una nueva interpretación del modelo de la barrera de incumplimiento en términos de un proceso riesgo-neutro de distancia al incumplimiento de la entidad de referencia (o proceso riesgo-neutro del ratio deuda/valor, etc). Y demostramos que hallar la frontera de incumplimiento que se ajusta a un conjunto de probabilidades de incumplimiento es equivalente a especificar un adecuado “exceso de deriva” para el proceso de distancia al incumplimiento. Este exceso de deriva puede interpretarse como la prima de riesgo que el mercado le asigna al valor de la compañía, à la Merton (1974), lo que hace que el proceso sea consistente con los diferenciales de crédito observados.

Finalmente, discutimos la implementación numérica del modelo, usando un método de diferencias finitas para la ecuación de Fokker-

Planck, en conjunción con un método Newton-Raphson para determinar el exceso de deriva en cada paso sucesivo del tiempo. Y aplicamos la teoría desarrollada al cálculo de las fronteras de incumplimiento y las derivadas para créditos AAA y BAA1, bajo diferentes hipótesis sobre las probabilidades de incumplimiento y las funciones de volatilidad.

El modelo de difusión de barrera

Definimos la función $P(t)$, siguiendo a Hull-White (2001) como la probabilidad, vista desde hoy, de que en algún momento anterior a tiempo t la compañía haya incumplido². La función de densidad de la probabilidad de incumplimiento viene entonces dada por $P'(t)$. En particular, $P'(t)\Delta t$ representa la probabilidad de incumplimiento entre tiempos t y $t+\Delta t$, vista desde tiempo cero. Al igual que en Hull-White (2001), vamos a considerar un “índice de incumplimiento” asociado a la empresa en cuestión, y que representamos por un proceso de Itô $X(t)$, $X(0) = X_0$:

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t) \quad (1)$$

donde $W(t)$ es el proceso de Wiener estándar. La empresa incumplirá en tiempo t si

$$X(t) = b(t) \quad \text{y} \quad X(s) > b(s), \quad s < t \quad (2)$$

donde $b(t)$ describe una *función barrera*. Más adelante daremos una interpretación económico-financiera a esta función. El instante de incumplimiento, τ , es, por definición, la primera vez en que $X(t)$ alcanza esta barrera, es decir,

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : X(t) \leq b(t)\} \quad (3)$$

Sea ahora $f(x, t)$ la función de densidad de la probabilidad de supervivencia de $X(t)$, que viene dada por

¹Un problema más difícil, que aparece con frecuencia en la práctica, es el de estimar las probabilidades de incumplimiento de empresas que no emiten deuda.

²Supondremos a partir de aquí que esta probabilidad ya se ha determinado bien sea a partir de diferenciales de crédito bien mediante algún otro procedimiento (Hull & White, 2000)

Figura 1: Densidad de probabilidad de incumplimiento para algunos valores de α y β

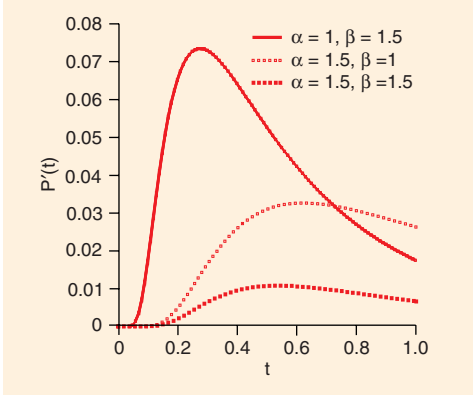


Figura 2: Distribución de Supervivencia en $\tau = 0.5$

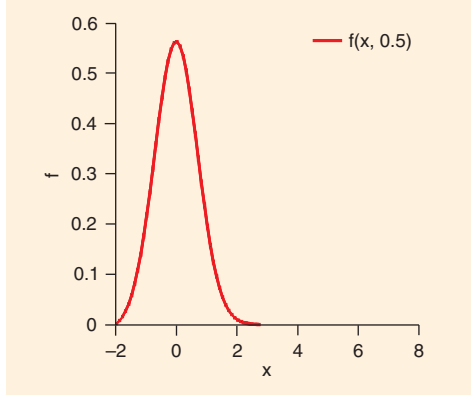
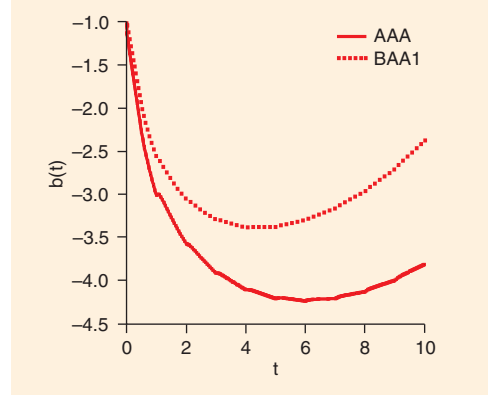


Figura 3: Fronteras de Incumplimiento para compañías AAA y BAA1



$$f(x, t) dx = \text{Prob} [x < X(t) < x + dx, \tau \geq t] \quad (4)$$

para $x \geq b(t)$.

Como consecuencia de resultados conocidos de la Teoría de Probabilidad se sabe que la función $f(x, t)$ satisface la ecuación progresiva de Fokker-Planck

$$f_t = \frac{1}{2} (\sigma^2(x, t) f)_{xx} - (a(x, t) f)_x, \quad t > 0, \quad x > b(t) \quad (5)$$

con condiciones iniciales y de frontera dadas por

$$f(x, t)|_{t=0} = \delta(x - X_0) \quad (6)$$

$$f(x, t)|_{x=b(t)} = 0 \quad (7)$$

Obsérvese que la integral

$$\int_{b(t)}^{\infty} f(x, t) dx \quad (8)$$

representa la probabilidad de supervivencia hasta tiempo t , es decir, $1 - P(t)$. De manera que la probabilidad de incumplimiento $P(t)$ se relaciona con la función de densidad de supervivencia $f(x, t)$ y la barrera $b(t)$ mediante la ecuación:

$$P(t) = 1 - \int_{b(t)}^{\infty} f(x, t) dx \quad (9)$$

Se deduce de esta ecuación que la función barrera $b(t)$ debe elegirse de manera que el par $\{f(x, t), b(t)\}$ sea consistente con las probabilidades de incumplimiento dadas $\{P(t), t > 0\}$. Para resaltar esta relación de manera explícita, diferenciamos la probabilidad de incumplimiento con respecto al tiempo en la ecuación (9), y usemos la ecuación en derivadas parciales que cumple f para deducir que

$$\begin{aligned} P'(t) &= - \int_{b(t)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b(t), t) b'(t) \\ &= - \frac{1}{2} \int_{b(t)}^{\infty} (\sigma^2 f)_{xx} dx + \int_{b(t)}^{\infty} (af)_x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^2 f) \Big|_{x=b(t)} \end{aligned} \quad (10)$$

Por consiguiente, la función de densidad de supervivencia no sólo ha de cumplir (7) sino que además debe satisfacer una condición adicional de frontera en la barrera $x = b(t)$. Esto significa que nos hallamos ante un

problema de frontera libre para la ecuación progresiva de Fokker-Planck, puesto que la frontera $b(t)$ es desconocida y que para su determinación ha de exigirse que cumpla las dos condiciones de frontera (7) y (10).

Transformaciones de similitud

Obsérvese que el modelo queda invariante tras un cambio de escala, o transformación de similitud. De hecho, si σ_0 es un número positivo, y consideremos la transformación

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sigma_0}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{\sigma_0}, \quad \tilde{\sigma}(\tilde{x}, t) = \frac{\sigma(x, t)}{\sigma_0}, \quad \tilde{a}(\tilde{x}, t) = \frac{a(x, t)}{\sigma_0} \quad (11)$$

se deduce de forma inmediata que la nueva función $\tilde{f}(\tilde{x}, t)$ dada por

$$\tilde{f}(\tilde{x}, t) = \sigma_0 f(x, t) \quad (12)$$

también satisface las ecuaciones (5-7) y la ecuación (10). En particular, si $\sigma(x, t)$ es una constante podemos, mediante un cambio de escala, deshacernos del parámetro de volatilidad. Es decir, las soluciones con volatilidad constante arbitraria σ se obtienen a partir de las soluciones con $\sigma = 1$. En esencia, este último caso es el que se analiza en Hull-White [8], donde se supone que el índice de incumplimiento sigue un movimiento Browniano estándar.

Si σ no es constante, el modelo de difusión propuesto permite incorporar funciones de volatilidad que pueden depender tanto del valor del índice como del tiempo. Esta observación podría ser de utilidad si, por ejemplo, se considera que la volatilidad del índice de incumplimiento debe aumentar según se aproxima el incumplimiento.

Distancia al incumplimiento

Establezcamos la siguiente definición: $P(t)$ denotará la probabilidad de incumplimiento de la compañía, implícita en los diferenciales de mercado. Un proceso riesgo neutro de distancia al incumplimiento (RNDI) es un proceso de difusión que satisface:

$$dY(t) = \tilde{a}(Y, t) dt + \tilde{\sigma}(Y, t) dW(t) \quad (13)$$

y es tal que $Y(0) > 0$, y $\text{Prob} [\inf_{s < t} Y(s) \leq 0] = P(t)$.

La definición es consistente con el supuesto de que la compañía

³ El proceso RNDI $Y(t)$ puede interpretarse como la diferencia entre el valor de los activos y la deuda, o como el logaritmo del ratio deuda-equity, etc, en un contexto "riesgo-neutral"

incumple cuando el valor de su activo se sitúa por debajo del valor de su deuda.³

Obsérvese que si ponemos

$$Y(t) = X(t) - b(t) \quad (14)$$

donde $X(t)$ es el proceso del índice de incumplimiento que hemos discutido en la sección anterior, entonces $Y(t)$ es un proceso RNDI con $\bar{a}(Y, t) = a(X, t) - b'(t)$ y $\bar{\sigma}(Y, t) = \sigma(X, t)$. Además, tenemos

$$dY(t) = dX(t) - b'(t)dt \quad (15)$$

Por tanto, el problema de localizar la barrera es equivalente al problemas de hallar el exceso de deriva en el proceso de distancia la incumplimiento que hace que este sea "riesgo-neutro" (calibrado a datos sobre probabilidades de incumplimiento).

La densidad de supervivencia del proceso RNDI $u(y, t)$ se relaciona con la densidad de supervivencia del índice de incumplimiento $f(x, t)$ mediante

$$u(y, t) = f(y + b(t), t) \quad (16)$$

Se sigue que la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de supervivencia del proceso RNDI viene dada por

$$u_t = b'u_y - (au)_y + \frac{1}{2}(\sigma^2 u)_{yy}, \quad y > 0, \quad t > 0 \quad (17)$$

$$u|_{t=0} = \delta(y - Y_0) \quad (18)$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad t > 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\sigma^2 u) \right]_{y=0} = P'(t), \quad t > 0 \quad (20)$$

Aquí, b' debe irse eligiendo progresivamente para que la segunda condición de frontera (20) se cumpla en todo tiempo. De esta forma se concluye que el problema de frontera libre para el índice de incumplimiento se transforma en un problema de control para el proceso RNDI. En esta formulación, podemos interpretar $b'(t)/\sigma$ como una "prima de riesgo" asociada a la percepción de la calidad crediticia de la compañía, en consonancia con el planteamiento de Merton (1974).

Capa inicial y ajuste de soluciones

Vamos a considerar primero el caso en que los coeficientes σ y a son constantes y $b(t)$ es una función afín. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$. Más adelante usaremos este caso especial para construir la solución general.

Supongamos, por tanto, que la barrera viene dada por la ecuación

$$\bar{b}(t) = -\alpha - \beta t, \quad \alpha > 0, \quad 0 < t < t_0 \quad (21)$$

En este caso se puede demostrar que la correspondiente probabilidad de incumplimiento viene dada por

$$\bar{P}(t) = 1 - \int_{\bar{b}(t)}^{\infty} f(x, t) dx = N\left(\frac{-\alpha - \beta t - X_0}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{-2(\alpha+X_0)\beta}{\sigma^2}} N\left(\frac{-\alpha + \beta t - X_0}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (22)$$

donde $N(x)$ es la función de distribución de la normal estándar, y que la

Tabla 1: Probabilidades de Incumplimiento para Bancos

año	AAA			BAA1
	Tasas de recuperación esperadas			50%
	30%	50%	70%	
1	0.0052	0.0073	0.0122	0.0222
2	0.0097	0.0136	0.0227	0.0285
3	0.0119	0.0166	0.0277	0.0315
4	0.0135	0.0190	0.0316	0.0339
5	0.0150	0.0210	0.0351	0.0360
6	0.0164	0.0229	0.0382	0.0380
7	0.0176	0.0246	0.0410	0.0396
8	0.0188	0.0264	0.0439	0.0415
9	0.0203	0.0284	0.0473	0.0437
10	0.0220	0.0307	0.0512	0.0466

correspondiente densidad viene dada por

$$\bar{P}'(t) = \frac{\alpha + X_0}{t\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\alpha+\beta t+X_0)^2}{2\sigma^2 t}} \quad (23)$$

Esto se deduce de propiedades estándar del movimiento browniano. Bajo esta mismas hipótesis, la función de densidad de la probabilidad de supervivencia viene dada por

$$f_{\alpha,\beta}(x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-X_0)^2}{2\sigma^2 t}} \left[1 - e^{-\frac{2(\alpha+X_0)}{\sigma^2 t}(\alpha+\beta t)} \right] \quad (24)$$

para $-\alpha - \beta t \leq x < \infty$.

La densidad del proceso RNDI viene dada por

$$u_{\alpha,\beta}(y, t) = f_{\alpha,\beta}(y - \alpha - \beta t, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-\beta t-Y_0)^2}{2\sigma^2 t}} \left[1 - e^{-\frac{2Y_0}{\sigma^2 t} y} \right] \quad (25)$$

para $y \geq 0$, donde $Y_0 = X_0 + \alpha > 0$ es la distancia inicial al incumplimiento.

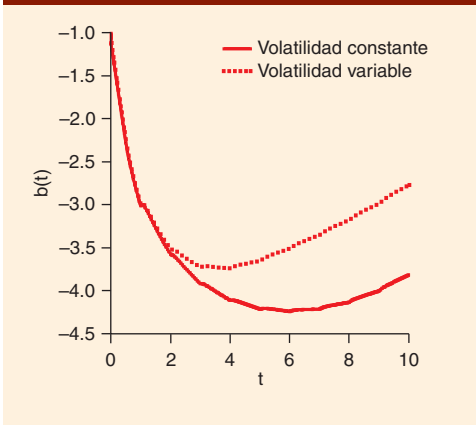
En la Figura 1, se exhiben la probabilidad de incumplimiento $\bar{P}(t)$ y la densidad de la probabilidad de incumplimiento $\bar{P}'(t)$, como funciones de t , para varios conjuntos de valores positivos de α y de β . En todos estos casos, se ha tomado $X(t)$ como el movimiento browniano con deriva cero, con $\sigma = 1$ y $X_0 = 0$. Bajo estas condiciones, $\alpha > 0$ es la distancia inicial al incumplimiento. Obsérvese que \bar{P}' es unimodal y que decae a cero exponencialmente tras alcanzar su máximo. La razón es que la barrera, que es lineal en el tiempo, crece por encima del factor de escala raíz cuadrada del tiempo del movimiento browniano. Por consiguiente, la función de densidad de la probabilidad de incumplimiento decrece en cuanto el tiempo sobrepasa un cierto nivel.

Consideremos ahora la solución del modelo para datos arbitrarios $P(t)$. La estrategia es usar el modelo de línea recta para un cierto tiempo finito, aunque pequeño, t_0 , para luego ajustar esta solución a una función $b(t)$ calculada numéricamente. La necesidad de una "capa inicial" proviene de que el dato inicial de función- δ se anula para cualquier orden en el punto $t = 0$ y es preciso regularizarla de forma consistente con las condiciones de frontera que queremos imponer para valores pequeños de t . Para una probabilidad de incumplimiento dada $P(t)$, elegimos los parámetros α y β de tal forma que

$$\bar{P}(t_0) = P(t_0) \quad (26)$$

³El caso del movimiento browniano con deriva es análogo, siendo la única diferencia la modificación de la pendiente de la línea que define la barrera

Figura 4: Barreras para diferentes estructuras de volatilidad



$$\bar{P}'(t_0) = P'(t_0) \quad (27)$$

donde $P(t_0)$ y $P'(t_0)$ se estiman a partir de datos de mercado. Una sencilla implementación del método Newton-Raphson da lugar a una solución de α y β para valores pequeños de $P(t_0)$ y $P'(t_0)$. En la Figura 2, consideramos un ejemplo donde se ha elegido $t_0 = 0.5$ y $P(0.5) = 0.01$, $P'(0.5) = 0.02$, lo que da lugar a $\alpha = 1.044$ y $\beta = 1.949$. La distribución de supervivencia en $t = 0.5$ se dibuja en la figura.

Una vez que la distribución de supervivencia en $t = t_0$ ha sido determinada, se usa como condición inicial de las ecuaciones en derivadas parciales (17–20). Como esta distribución se deriva de las condiciones sobre la probabilidad de incumplimiento (26) y (27), la condición de compatibilidad (20) se satisface automáticamente en $t = t_0$. Más adelante se describe un algoritmo de diferencias finitas de segundo orden para resolver la EDP para tiempos mayores que t_0 .

Algoritmos numéricos para probabilidades de incumplimiento generales

Los análisis numéricos que siguen se basan en la formulación RNDI, esto es, en resolver un problema de control que tiene como incógnita el coeficiente de deriva $b'(t)$. Para simplificar, vamos a detallar el cálculo en el caso concreto en que $\sigma = 1$, y $a = 0$. La extensión del algoritmo al caso de coeficientes variables es obvia.

Arrancamos desde $t = t_0$ con la condición inicial de la solución de la capa inicial, es decir,

$$u(y, t_0) = u_{\alpha, \beta}(y, t_0), \quad y \geq 0 \quad (28)$$

Para construir un algoritmo de diferencias finitas de segundo orden para las ecuaciones (17–19) podemos proceder como sigue. Definamos $y_j = (j - 1/2)h$ y $t^n = n\Delta t$, y denotemos por u_j^n la aproximación numérica a $u(y_j, t^n)$. Consideremos un esquema de Crank-Nicholson

Tabla 2: Probabilidades de incumplimiento forward

año	AAA	BAA1
1	0.244002	0.301495
2	0.165700	0.182113
3	0.096906	0.103299
4	0.068161	0.071312
5	0.053285	0.055123

Figura 5: Comparación con el modelo de Hull-White

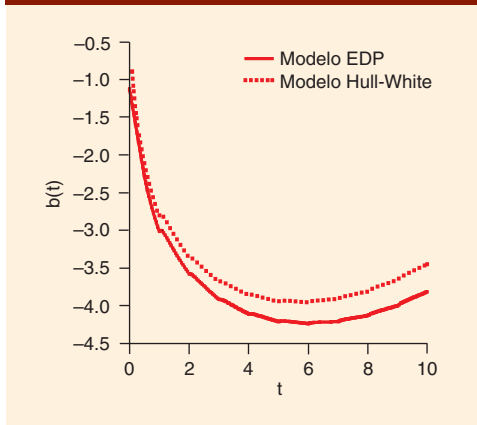
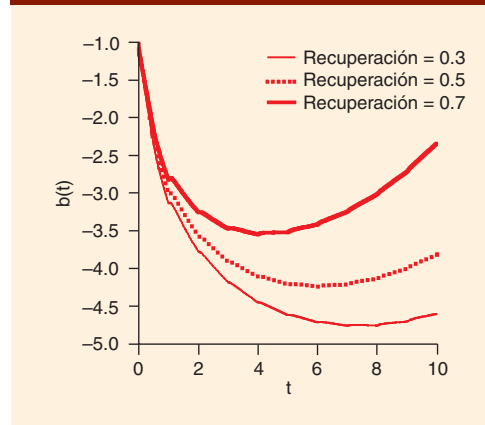


Figura 6: Barreras de incumplimiento para distintas tasas medias de recuperación



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \lambda^{n+1/2} \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{4h^2} \quad (29)$$

con condición de frontera $u_0^n = 0$, $n \geq 0$, donde $\lambda^{n+1/2}$ es una deriva indeterminada que depende del paso temporal n y que se determina de forma inductiva. El término $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ se calcula mediante un paso predictor en el que intervienen extrapolaciones de Taylor en espacio y tiempo junto con un esquema de aproximación lateral (upwind) para la derivada espacial.⁵

Para cada valor $\lambda^{n+1/2}$, el sistema tridiagonal resultante se resuelve usando paquetes estándar de álgebra lineal. El valor $\lambda^{n+1/2}$ que ajusta la condición de frontera adicional (20), $\lambda_*^{n+1/2}$, se halla mediante el método de iteración de Newton-Raphson. Finalmente, igualamos el valor calculado $\lambda_*^{n+1/2}$ con la deriva, es decir,

$$b'(t^{n+1/2}) = \lambda_*^{n+1/2} \quad (30)$$

y extendemos la barrera un paso temporal

$$b(t^{n+1}) = b(t^n) + \lambda_*^{n+1/2} \Delta t \quad (31)$$

La estabilidad numérica de los algoritmos, es decir, el que la función $b'(t)$ dependa de manera continua de la densidad de probabilidad $P'(t)$, es una consideración importante, si se tiene en cuenta que los datos sobre incumplimiento son discretos y que, consecuentemente, la densidad de probabilidad ha de construirse mediante interpolación. Mencionamos aquí, sin más demostración, que el problema de frontera libre y el algoritmo admiten una única solución estable en cualquier intervalo en el que la densidad de probabilidad $P'(t)$ sea positiva. En la sección que sigue, en la que estudiamos ejemplos concretos, haremos algunos comentarios adicionales sobre estabilidad y sobre interpolación de probabilidades.

⁵Obsérvese que este esquema es una aproximación de segundo orden tanto en el espacio como en el tiempo, y todos los cálculos son incondicionalmente estables con respecto a la elección de b , Δt y $\lambda^{n+1/2}$.

⁶Los autores suministrarán tanto los datos como la fuente de la que se han obtenido a quienes así lo soliciten.

Figura 7: Diferentes métodos de interpolación para la probabilidad de incumplimiento

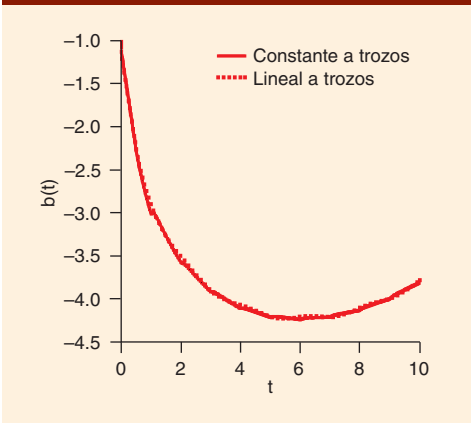


Figura 8: Probabilidad de incumplimiento y la deriva correspondiente

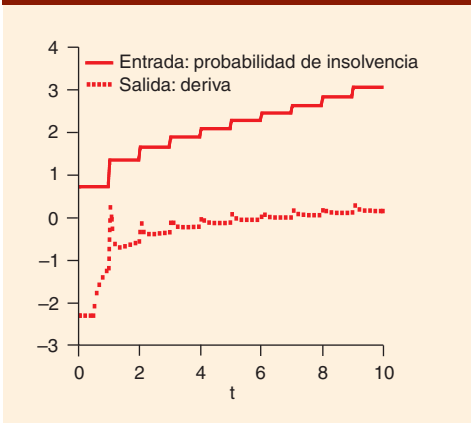
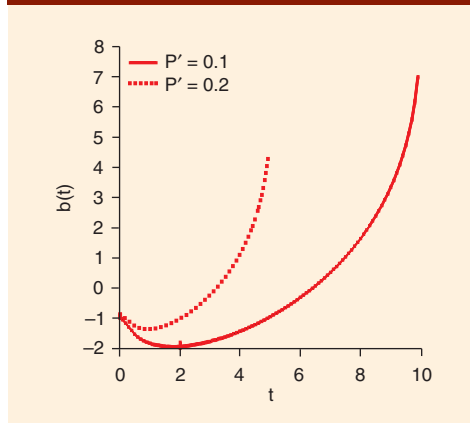


Figura 9: Explosión de la barrera de incumplimiento



Ejemplos

Para el ejemplo numérico, introducimos un dominio finito ($0 \leq x \leq 20$), lo suficientemente grande como para englobar la evolución dinámica de las soluciones que estudiamos en esta sección. Además, usamos una capa inicial con $t_0 = 0.5$. A no ser que se indique específicamente, suponemos una volatilidad constante de $\sigma = 1$. En los cálculos por diferencias finitas usamos 400 puntos en la dirección de las x y elegimos $\Delta t = 0.05$.

En el primer ejemplo, vamos a usar las probabilidades de incumplimiento del sector bancario de los ratings AAA y AAB1 de Standard and Poor's⁶. En la Tabla 1 se muestran las probabilidades de incumplimiento para distintas tasas de recuperación y para los próximos diez años. Por ejemplo, 0.0073 significa que un banco con rating AAA tiene una probabilidad de 0.73% de incumplimiento en el próximo año, y el 0.0136 significa que tiene una probabilidad de 1.36% de incumplimiento durante el segundo año.

Estas probabilidades de incumplimiento se han estimado para tasas de recuperación media de 30%, 50% y 70%. Como explican Hull y White (2000), a distintas tasas de recuperación corresponden probabilidades de incumplimiento muy distintas. Consecuentemente, nuestras barreras exhibirán una fuerte dependencia de las tasas de recuperación que se haya supuesto. En nuestros cálculos, hemos generado una función del tiempo constante a trozos $P'(t)$ a partir de los datos de la tabla. Hemos dibujado en la Figura 3, las barreras de incumplimiento correspondientes a bancos AAA y BAA1, obtenidas a partir de nuestro modelo, para valores de $0 \leq t \leq 10$, usando las probabilidades correspondientes a una tasa de recuperación del 50%. La forma de estas dos curvas es muy similar, ya que como pertenecen a la misma industria los determinantes de su posible incumplimiento en el futuro son semejantes. La barrera para el rating inferior (BAA1) se encuentra siempre situada por encima de la barrera del rating superior (AAA), lo que indica que es más probable que incumpla la compañía con el rating inferior.

Una de las ventajas del modelo que presentamos aquí es que permite incorporar estructuras generales de volatilidad. Hemos considerado un ejemplo donde la volatilidad se incrementa cuando la trayectoria browniana se acerca a la frontera de incumplimiento, y hemos comparado el resultado de este caso con el correspondiente al de volatilidad constante ($\sigma = 1$). En concreto, hemos elegido

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{4}(x-2) & 2 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2} & x > 4 \end{cases} \quad (32)$$

En la Figura 4, se exhiben las barreras de incumplimiento que nos proporciona nuestro modelo para valores de $0 \leq t \leq 10$, a partir de los datos de la Tabla 1 para una tasa de recuperación esperada del 50%, y para los casos de volatilidad constante y de volatilidad variable. Se observa como la barrera del caso de volatilidad variable se sitúa por encima de la barrera del caso de volatilidad constante. Esto ocurre porque el valor medio de la volatilidad en el caso variable es menor que el nivel de la volatilidad constante que hemos elegido para el ejemplo. Para conseguir la misma probabilidad de alcanzar la barrera, ésta tiene que elevarse para adaptarse a una menor volatilidad.

A continuación, pasamos a comparar nuestro modelo de ecuaciones en derivadas parciales (modelo EDP) con el modelo original de Hull-White. Para ello hemos implementado el modelo de Hull-White (2001) con la misma discretización y con los mismos parámetros. En la Figura 5, se muestran los resultados de la comparación donde hemos usado probabilidades de incumplimiento correspondientes a una tasa de recuperación esperada del 50%. La principal diferencia en cuanto a la forma y ubicación de las barreras yace en que en el modelo de Hull-White las trayectorias sólo pueden salir por la barrera en tiempos discretos, mientras que en el modelo EDP pueden hacerlo en cualquier momento. Esto explica porqué la barrera del modelo EDP se encuentra situada ligeramente por debajo de la barrera del modelo de Hull-White.

También podemos calcular las barreras correspondientes a otras probabilidades de incumplimiento. En la Figura 6, se han dibujado las barreras correspondientes a las probabilidades de incumplimiento de los bancos AAA con tasas de recuperación media de 30%, 50% y 70%. Como es de esperar, puesto que a menores tasas de recuperación les corresponden probabilidades de incumplimiento menores, a menores tasas de recuperación les corresponderán barreras más bajas.

Los datos sobre probabilidades de incumplimiento son, en general, discretos, como los de la Tabla 1. Como el método EDP requiere interpolar las probabilidades, es importante verificar que diferentes métodos de interpolación para las probabilidades no producen diferencias significativas en las barreras que el modelo genera. En todos los cálculos anteriores hemos usado funciones de probabilidad de incumplimiento constantes a trozos $P'(t)$ calculadas de manera natural a partir de los datos de probabilidades de incumplimiento acumuladas. Para estudiar la sensibilidad de los resultados a diferentes métodos de interpolación, hemos considerado además un esquema de interpolación lineal a trozos para $P'(t)$, en el que se requería que la $P(t)$ generada fuera consistente con los datos en los puntos originales. En la Figura 7, hemos dibujado las barreras que resultan de estas dos densidades de probabilidad. Los resultados numéricos indican que el esquema es estable con respecto a pequeñas perturbaciones de la función de densidad de probabilidad que representan a los datos.

En la Figura 8, exhibimos las funciones de densidad de las probabilidades de incumplimiento (como la entrada) y la función de deriva $b'(t)$ (como salida) para el caso de los bancos con rating AAA. La figura muestra cualitativamente la forma en que la deriva “responde” a los datos de la probabilidades de incumplimiento: un incremento en la probabilidad de incumplimiento da lugar a incremento en la deriva, que mueve hacia arriba a la barrera, lo que permite a su vez que sea más fácil que las trayectorias salgan por la barrera.

Una vez que se ha calculado la barrera de incumplimiento de una compañía para un cierto período de tiempo ($0 \leq t \leq T$), se puede utilizar el modelo para calcular probabilidades de incumplimiento forward para cualquier fecha futura $T_0 > 0$. De hecho, simplemente tenemos que resolver la EDP comenzando desde tiempo T_0 con la barrera de incumplimiento fija, y hacer que la densidad de supervivencia comience a partir de T_0

$$u(x, T_0) = \delta(x - X_0) \quad (33)$$

de manera que la distancia a incumplimiento en tiempo T_0 sea la misma que hoy. Hemos discutido la equivalencia entre la deriva $a(t)$ y la frontera de incumplimiento $b(t)$ en las secciones anteriores “Distancia al incumplimiento” y “Capa inicial y ajuste de soluciones”, pero aquí van a desempeñar papeles distintos. Si se dispone de suficiente información, se puede ajustar la deriva a una estructura de probabilidades de incumplimiento forward. En la Tabla 2, presentamos las probabilidades de incumplimiento forward a cinco años obtenidas a partir de los resultados de la Figura 3. En términos intuitivos, éstas son las probabilidades de incumplimiento para los próximos seis a 10 años, suponiendo que la compañía ha sobrevivido los cinco primeros años y que la probabilidad de incumplimiento para el instante siguiente es la misma que hoy. Obsérvese que, como nuestra barrera es convexa, estas probabilidades forward son mucho mayores que las probabilidades spot.

Finalmente, como verificación del esquema numérico, resulta matemáticamente interesante estudiar el caso en que la probabilidad de incumplimiento sea tal que implica que el incumplimiento va a ocurrir con seguridad antes de una determinada fecha T . Esto debe reflejarse en que prácticamente todas las trayectorias brownianas $X(t)$ alcanzan la barrera antes de ese tiempo T , lo que sólo puede ocurrir si $b'(t)$ explota en esa fecha y la curva $b(t)$ se hace vertical cuando t se aproxima a T . Para verificar esto, elegimos una densidad de probabilidad de incumplimiento constante $P'(t) = 0.1$. En este caso, la probabilidad de

incumplimiento acumulada $P(10) = 1$, lo que significa que la compañía incumplirá con seguridad antes de tiempo $T = 10$. En la Figura 9, vemos como la barrera $b(t)$ se hace vertical cuando t se acerca a 10. La misma figura también nos muestra el resultado de otro experimento en el que se incrementa la probabilidad de incumplimiento hasta 0.2, lo que empuja el tiempo de la explosión a $T = 5$, como predice el que $P(t)$ alcanza 1 cuando t tiende a 5.

Conclusiones

Hemos propuesto un marco general para modelizar índices de incumplimiento como difusiones y eventos de incumplimiento como primeros cruces de fronteras. Asimismo, hemos mostrado que la calibración de este tipo de modelos de índice de incumplimiento de tiempo continuo da lugar a un problema de frontera libre para la correspondiente ecuación de Fokker-Planck.

También hemos establecido un isomorfismo entre la formulación de índice de incumplimiento de Hull-White y el concepto de índice RNDI. Este isomorfismo permite reinterpretar la derivada de la frontera de incumplimiento de Hull-White como una prima de riesgo que ha de ser añadida al proceso de distancia la incumplimiento de la compañía para que sea consistente con las probabilidades de incumplimiento que se han extraído de diferenciales de bonos o de ratings crediticios. Hemos propuesto un sencillo algoritmo numérico para hallar la deriva, mediante una discretización de un problema de control. Se han presentado varios ejemplos y tests que indican que el algoritmo produce resultados razonables y que es estable con respecto a pequeñas perturbaciones de los datos de entrada sobre densidades de probabilidad.

Finalmente, queremos señalar que también se pueden construir modelos “noparamétricos” que implementan los conceptos de índice de incumplimiento riesgoneuro y RNDI. Éstos se basan en ajustar los tiempos de primer paso de las trayectorias aleatorias a través de la barrera a probabilidades de incumplimiento dadas. Por ejemplo, se puede generar una simulación Montecarlo de diferentes escenarios para la distancia al incumplimiento de una compañía usando datos económicos sobre la volatilidad de la compañía, para, en un segundo paso, recalibrar las probabilidades de los diferentes escenarios para reflejar los datos actuales sobre probabilidades de incumplimiento acumuladas, como en el método de Montecarlo ponderado (Avellaneda *et al* 2000). ■

**Traducción al castellano: José L Fernández (Analistas
Financieros Internacionales) y
Manuel Menéndez (Banco Español de Crédito)**

BIBLIOGRAFÍA

Avellaneda M and Laurence P, 2000

Quantitative modeling of derivative securities
Chapman & Hall

Avellaneda M, R Buff, C Friedman, N Grandchamp, L Kruk and J Newman, 2000

Weighted Monte Carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models
International Journal of Theoretical and Applied Finance 4(1), pages 91–119

Black F and J Cox, 1976

Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions
Journal of Finance 31, pages 351–367

Brennan M and E Schwartz, 1980

Analyzing convertible bonds
Journal of Financial and Quantitative Analysis 15, pages 907–929

Duffie D and K Singleton, 1999

Modeling term structure models of defaultable bonds
Review of Financial Studies 12, pages 687–720

Geske R, 1977

The valuation of corporate liabilities as compound options
Journal of Financial and Quantitative Analysis 12, pages 541–552

Hull J and A White, 2000

Valuing credit default swaps I: no counterparty default risk
Journal of Derivatives 8(1)

Hull J and A White, 2001

Valuing credit default swaps II: modeling default correlations
Journal of Derivatives 8(3)

Kim J, K Ramaswamy and S Sundaresan, 1993

Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds?
Financial Management, autumn, pages 117–131

Merton R, 1974

On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates
Journal of Finance 2, pages 449–470

Shimko D, N Tejima and D van Deventer, 1993

The pricing of risky debt when interest rates are stochastic
Journal of Fixed Income 3, pages 58–65

Titman S and W Totous, 1989

Valuing commercial mortgages: an empirical investigation of the contingent claims approach to pricing risky debt
Journal of Finance 44, pages 345–373