

# SYSTÈMES DE POINTS EN INTERACTION COULOMBIENNE

SYLVIA SERFATY

ABSTRACT. Les grands systèmes de points en interaction coulombienne apparaissent dans de nombreux modèles de physique de la matière condensée, en mécanique classique et quantique et en théorie de l'approximation, et donnent lieu à une variété de questions mathématiques appartenant au domaine du calcul des variations, des EDP et des probabilités. On passera en revue les motivations de ces questions, puis les résultats de "champ moyen" qui permettent de dériver des modèles effectifs pour de tels systèmes à l'échelle macroscopique. On expliquera ensuite comment on peut aller à l'ordre suivant pour obtenir de l'information à l'échelle microscopique, ce qui permet par exemple d'observer dans le cadre de la mécanique statistique l'effet de la température et d'aboutir à des questions de cristallisation.

## 1. CADRE GÉNÉRAL

On s'intéresse à de grands systèmes de points en interaction coulombienne, décrits par une énergie de la forme

$$(1.1) \quad \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \mathbf{g}(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^N V(x_i).$$

Ici les points  $x_i$  appartiennent à l'espace  $\mathbb{R}^d$ , il est également intéressant de considérer des points sur des variétés. Le noyau d'interaction  $\mathbf{g}(x)$  est

$$(1.2) \quad \mathbf{g}(x) = -\log|x|, \quad \text{en dimension } d = 2,$$

$$(1.3) \quad \mathbf{g}(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}, \quad \text{en dimension } d \geq 3.$$

À une constante multiplicative près, c'est bien le noyau de Coulomb en dimension  $d \geq 2$ , c.a.d la solution fondamentale du laplacien, qui résout

$$(1.4) \quad -\Delta \mathbf{g} = c_d \delta_0$$

où  $\delta_0$  est la masse de Dirac à l'origine et  $c_d$  est une constante explicite qui ne dépend que de la dimension. Il est aussi intéressant de considérer le cas unidimensionnel logarithmique

$$(1.5) \quad \mathbf{g}(x) = -\log|x|, \quad \text{en dimension } d = 1,$$

qui n'est pas coulombien, et les noyaux d'interactions de Riesz, de la forme

$$(1.6) \quad \mathbf{g}(x) = \frac{1}{|x|^s} \quad s > 0.$$

Le cas coulombien uni-dimensionnel de noyau  $-|x|$  est également intéressant mais bien étudié.

On a en outre inclus un champ extérieur ou potentiel confinant  $V$ , supposé assez régulier et tendant vers l'infini assez vite à l'infini. A cause du facteur  $N$  devant  $V$ , l'énergie de confinement totale est du même ordre que l'énergie d'interaction, ce qui confine les points dans un sous-domaine de  $\mathbb{R}^d$  de taille finie.

Le noyau de Coulomb et l'opérateur de Laplace sont bien évidemment très importants en physique puisque les interactions fondamentales de la nature sont coulombiennes, on passera plus loin en revue les raisons d'étudier ce genre de système.

On peut s'intéresser à plusieurs types de problèmes, tous dans la limite  $N \rightarrow \infty$ :

- (1) décrire les minimiseurs et éventuellement les points critiques de (1.1) ;
- (2) comprendre les états typiques de systèmes d'énergie  $\mathcal{H}_N$  et température inverse  $\beta > 0$ , décrits par la mesure de Gibbs

$$(1.7) \quad d\mathbb{P}_{N,\beta}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N.$$

Ici  $\mathbb{P}_{N,\beta}$  est la densité de probabilité d'observer le système dans la configuration  $(x_1, \dots, x_N)$  si la température est  $1/\beta$ . La constante  $Z_{N,\beta}$  s'appelle la "fonction de partition" du système, c'est la constante de normalisation qui fait de  $\mathbb{P}_{N,\beta}$  une probabilité <sup>1</sup> c.a.d.

$$(1.8) \quad Z_{N,\beta} = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} e^{-\beta\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N;$$

- (3) comprendre les équations d'évolution associées à (1.1), telles que le flot gradient de  $\mathcal{H}_N$  donné par le système d'équations différentielles couplées

$$(1.9) \quad \dot{x}_i = -\frac{1}{N} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N),$$

la dynamique conservative donnée par un système de la forme

$$(1.10) \quad \dot{x}_i = \frac{1}{N} \mathbb{J} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)$$

où  $\mathbb{J}$  est une matrice antisymétrique, ou bien la dynamique hamiltonienne donnée par l'équation de Newton

$$(1.11) \quad \ddot{x}_i = -\frac{1}{N} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N);$$

et on peut également s'intéresser aux mêmes dynamiques avec un terme de bruit ajouté.

D'un point de vue mathématique, ces questions touchent à l'analyse (EDP, calcul des variations, théorie de l'approximation), aux probabilités, à la physique mathématique, et même à la géométrie (quand on considère par exemple de tels systèmes sur des variétés). Certaines des questions de cristallisation auxquelles elles mènent recourent aussi la théorie des nombres, comme on le verra.

## 2. MOTIVATIONS

Les motivations pour l'étude de ces questions sont très nombreuses et variées. On peut citer principalement:

- (1) Les supraconducteurs, superfluides et condensats de Bose-Einstein où l'on observe des tourbillons ou *vortex* quantifiés, qui se comportent mathématiquement comme des particules en interaction coulombienne bi-dimensionnelle. Dans ces systèmes, les vortex se repoussent donc logarithmiquement, ce qui est contrebalancé par un

---

<sup>1</sup>On ne sait pas calculer explicitement (1.8) sauf dans le cas particulier de (1.5) pour des  $V$  spécifiques, ce qui correspond aux intégrales de Selberg (cf. [Fo])

effet de confinement du champ magnétique ou de la rotation, et on observe, ainsi que prédit par Abrikosov, qu'ils forment des réseaux triangulaires parfaits, appelés *réseaux d'Abrikosov*, voir Fig. 1 (pour plus d'images voir [www.fys.uio.no/super/vortex/](http://www.fys.uio.no/super/vortex/)). Ces systèmes sont en fait décrits par une énergie (l'énergie de Ginzburg-Landau) et les

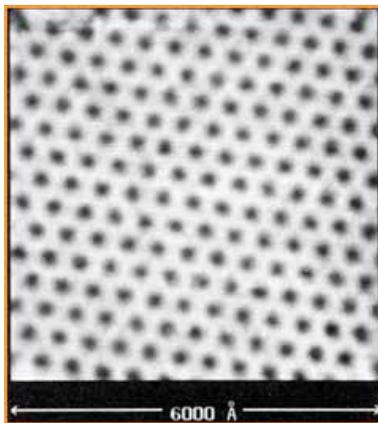


FIGURE 1. Tourbillons de vortex (en noir) formant des réseaux d'Abrikosov, H. F. Hess et al. Bell Labs *Phys. Rev. Lett.* 62, 214 (1989).

EDP associées, mais on peut montrer rigoureusement (ceci a été démarré par l'étude de Bethuel-Brezis-Hélein et poursuivi jusqu'à [SS] (voir aussi [Se1]) que l'analyse des vortex se ramène aux problèmes discrets décrits ci-dessus, dans le cas (1.2).

Une autre motivation est l'analyse des vortex dans les fluides classiques, telle qu'initée par Onsager, voir [MP], ou la physique des plasmas.

- (2) Les points de Fekete en théorie de l'approximation: points optimisants pour l'interpolation numérique, ils sont définis comme maximisant

$$\prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$$

ou de manière équivalente minimisant

$$- \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j|.$$

On les étudie souvent sur la sphère ou d'autres variétés. En théorie de l'approximation [SK], on s'intéresse aussi à la minimisation des énergie de Riesz

$$(2.1) \quad \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^s}$$

pour tous les  $s$ . On peut montrer que lorsque  $s \rightarrow 0$ , les minimiseurs de cette énergie convergent vers ceux de l'énergie logarithmique, tandis que lorsque  $s \rightarrow \infty$  ils tendent vers les minimiseurs du problème d'empilement optimal de sphères (dont la solution en dimension 2 est connue depuis Fejes Tóth pour être aussi le réseau triangulaire, ainsi que représenté Figure 2). Il a été démontré par Hales que la solution en dimension 3 du même problème d'empilement est le réseau FCC (cubique à faces centrées), c'était une conjecture de Kepler. En dimension plus grande la solution n'est connue qu'en

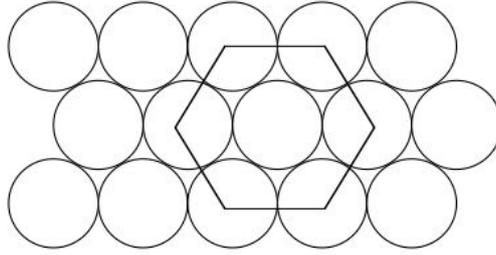


FIGURE 2. Solution du problème d'empilement maximal de sphères en dimension 2.

dimensions 8 et 24 grâce à une remarquable récente percée due à Viazovska (voir la présentation dans [Coh] et la revue [Sl]). En grande dimension, où le problème est important pour les codes correcteurs d'erreur, on s'attend à ce que la solution ne soit *pas* un réseau.

- (3) Mécanique statistique et quantique: l'ensemble donné par (1.7) dans les cas coulombiens s'appelle en physique un *gaz de Coulomb* ou *plasma à une composante* et c'est un ensemble classique en mécanique statistique et considéré comme difficile à analyser à cause de la longue portée de l'interaction. L'étude du gaz de Coulomb bi-dimensionnel, comme celle du log gaz unidimensionnel sont aussi motivées par l'analyse de nombreuses fonctions d'onde quantiques (effet Hall quantique fractionnaire, fermions libres dans un champ magnétique...) et celle de divers modèles aléatoires, sur ces aspects voir [Fo]. La variante du cas Coulomb bi-dimensionnel avec des charges positives et négatives qui coexistent est intéressante pour des modèles de physique théorique (modèle XY, sine-Gordon) qui présentent une transition de Kosterlitz-Thouless, voir [Spe].
- (4) Les matrices aléatoires (voir [Fo]): dans les cas particuliers (1.5) et (1.2), la mesure de Gibbs (1.7) correspond dans certains cas à la loi des valeurs propres pour certains ensembles bien connus:
  - la loi des valeurs propres complexes d'une matrice  $N \times N$  à coefficients gaussiens iid est (1.7) avec (1.2),  $\beta = 2$ , et  $V(x) = |x|^2$ . C'est l'ensemble de Ginibre.
  - la loi des valeurs propres réelles d'une matrice hermitienne  $N \times N$  à coefficients gaussiens iid est (1.7) avec (1.5),  $\beta = 2$  et  $V(x) = x^2/2$ . C'est l'ensemble GUE (gaussien unitaire). La loi des valeurs propres réelles d'une matrice symétrique  $N \times N$  à coefficients gaussiens iid est (1.7) avec (1.5),  $\beta = 1$  et  $V(x) = x^2/2$ . C'est l'ensemble GOE (gaussien orthogonal).
- (5) La géométrie complexe fournit d'autres exemples de motivations, voir par exemple les travaux de Robert Berman et co-auteurs.

### 3. LA LIMITE DE CHAMP MOYEN ET LE COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE

**3.1. Questions.** La première question naturelle est de comprendre la limite quand  $N \rightarrow \infty$  de la *mesure empirique* définie comme

$$(3.1) \quad \mu_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$$

pour les configurations de points qui minimisent (1.1), les points critiques, les solutions des problèmes d'évolution ci-dessus, ou bien les configurations typiques sous (1.7), afin de dériver

des équations effectives ou des modèles réduits qui décrivent le comportement (champ) moyen des particules. Le terme champ moyen se réfère au fait que du point de vue physique, chaque particule subit l'effet du champ collectif (moyen)  $\mathbf{g} * \mu_N$  généré par les autres particules. La convergence au sens du champ moyen est aussi équivalente en un sens à la "propagation du chaos moléculaire", voir [Go]. D'un point de vue de mécanique statistique, on cherche aussi à comprendre la dépendance du comportement en la température, et les éventuelles transitions de phase associées.

**3.2. La mesure d'équilibre.** L'énergie (1.1) peut se réécrire comme

$$\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) = N^2 \left( \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta} \mathbf{g}(x - y) d\mu_N(x) d\mu_N(y) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu_N(x) \right)$$

où  $\Delta$  désigne la diagonale de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Il est alors naturel de considérer la version "continue" de l'énergie

$$\mathcal{I}_V(\mu) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{g}(x - y) d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu(x).$$

Il est bien connu en théorie du potentiel que  $\mathcal{I}_V$  admet un unique minimiseur parmi les mesures de probabilités, appelé *mesure d'équilibre*, notée  $\mu_V$  et caractérisée par le fait qu'il existe une constante  $c$  pour laquelle

$$(3.2) \quad \begin{cases} h^{\mu_V} + V \geq c & \text{sur } \mathbb{R}^d \\ h^{\mu_V} + V = c & \text{sur le support de } \mu_V \end{cases}$$

où

$$(3.3) \quad h^{\mu_V}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{g}(x - y) d\mu_V(y)$$

est le potentiel (électrique) engendré par  $\mu_V$ . Ceci est vrai pour les interactions coulombiennes et de Riesz, mais même pour des noyaux très généraux. Dans le cas coulombien, la mesure d'équilibre peut s'interpréter à l'aide d'un problème de l'obstacle (dans le cas Riesz d'un problème de l'obstacle fractionnaire), voir [Se1, Chap. 2]. Un exemple est celui de l'interaction coulombienne (en dimension quelconque) avec potentiel de confinement  $V = c|x|^2$ : on peut alors vérifier que la mesure d'équilibre est alors toujours (un multiple de) la fonction indicatrice d'une boule. Dans le contexte de l'ensemble de Ginibre en matrices aléatoires, cela s'appelle la "loi du cercle". Un autre exemple important est celui de l'interaction logarithmique en dimension 1 avec un potentiel  $V$  quadratique, la mesure d'équilibre est une mesure de densité  $\sqrt{x^2 - a^2} \mathbf{1}_{|x| < a}$ , appelé "loi du demi-cercle" (de Wigner), c'est elle qui intervient pour les ensembles GOE et GUE en matrices aléatoires.

$\mathcal{I}_V$  est bien la "limite de champ moyen" de l'énergie  $\mathcal{H}_N$ , et on peut montrer sans trop de difficulté que pour les minimiseurs de  $\mathcal{H}_N$ , la mesure empirique converge vers  $\mu_V$ , et  $\frac{1}{N^2} \min \mathcal{H}_N$  converge vers  $\mathcal{I}_V(\mu_V)$ .

On peut comprendre  $\nabla(h^\mu + V)$  comme la force moyenne sentie par la distribution de densité  $\mu$ . Au vu de (3.2) elle est donc nulle pour les minimiseurs. Plus généralement, on s'attend à ce que les points critiques de  $\mathcal{H}_N$  aient une distribution empirique limite satisfaisant

$$(3.4) \quad \nabla(h^\mu + V)\mu = 0.$$

Pour les situations dynamiques de (3), la limite formelle de (1.9) ou (1.10) est

$$(3.5) \quad \partial_t \mu = -\operatorname{div}(\nabla(h^\mu + V)\mu)$$

ou

$$(3.6) \quad \partial_t \mu = -\operatorname{div}(\mathbb{J}\nabla(h^\mu + V)\mu)$$

avec de nouveau  $h^\mu = \mathbf{g} * \mu$ . Dans le cas (1.2), (3.6) avec  $V = 0$  est également bien connue comme l'équation d'Euler en forme vorticité.

Le problème pour prouver rigoureusement la convergence vers des solutions de ces équations (dont le caractère bien posé demande lui aussi à être démontré) est le passage à la limite dans les produits du type  $\nabla h^\mu \mu$  qui sont non linéaires et a priori mal définis dans l'espace d'énergie. Dans le cas (1.2), on peut s'en sortir à l'aide de la reformulation de ces termes introduite par Delort dans le cadre de la mécanique des fluides, mais cela ne fonctionne pas en dimension plus grande.

Jusqu'ici, tous les résultats de convergence étaient limités aux singularités sous-coulombiennes  $s < d - 2$  ou à la dimension 1. Grâce à une méthode d'énergie modulée développée dans [Se2] pour la limite de champ moyen des équations de Ginzburg-Landau, basée sur la stabilité des solutions des équations limites relativement à la "norme de Coulomb" (ou de Riesz)

$$\|\mu\|^2 = \iint \mathbf{g}(x - y) d\mu(x) d\mu(y),$$

le cas Coulombien ou Riesz plus singulier peut maintenant être traité :

**Théorème 1** ([Se3]). *Pour les évolutions (1.9) et (1.10), pour tout  $d$ , tout  $d - 2 \leq s < d$  dans (1.6), ou (1.5) ou (1.2), la mesure empirique converge quand  $N \rightarrow +\infty$  vers la solution de (3.5) ou (3.6), sous condition que celle-ci soit assez régulière et que l'énergie de la donnée initiale converge vers celle de sa limite.*

Ce résultat était précédé par celui de Duerinckx en dimension 1 et 2 pour  $s < 1$ .

En ce qui concerne (1.11) l'équation limite est formellement l'équation de Vlasov-Poisson

$$(3.7) \quad \partial_t \rho + v \cdot \nabla_x \rho + \nabla(h^\mu + V) \cdot \nabla_v \rho = 0$$

où  $\rho(t, x, v)$  est la densité de particules au temps  $t$  et position  $x$  de vitesse  $v$ , et  $\mu(t, x) = \int \rho(t, x, v) dv$  est la densité de particules. Malgré des progrès récents, on ne sait pas prouver la convergence de (1.11) vers (3.7), dans les cas où l'interaction est coulombienne ou plus singulière. A ce sujet, on peut consulter les revues [Jab, Go].

**3.3. Avec température: mécanique statistique.** Considérons maintenant (1.8) et le problème (2). Il est connu que même avec température, le comportement du système reste régi par la mesure d'équilibre. Ceci peut s'exprimer comme un principe de grandes déviations, qui dit essentiellement que si  $E$  est un sous-ensemble de l'espace des mesures de probabilité, après avoir identifié les configurations  $(x_1, \dots, x_N)$  dans  $(\mathbb{R}^d)^N$  et leur mesure empirique, on a

$$(3.8) \quad \mathbb{P}_{N,\beta}(E) \approx e^{-\beta N^2 (\min_E \mathcal{I}_V - \min \mathcal{I}_V)},$$

ce qui implique, au vu de l'unicité du minimiseur  $\mu_V$  de  $\mathcal{I}_V$ , que les configurations dont la mesure empirique ne converge pas vers  $\mu_V$  ont une très petite probabilité. Par exemple, dans le cas des matrices du GOE ou GUE où la mesure d'équilibre est la loi du demi-cercle, on déduit comme application un corollaire d'un résultat de Ben Arous et Guionnet: la probabilité pour une matrice du GOE ou GUE d'être définie positive (donc d'avoir toutes ses valeurs propres positives, ce qui est incompatible avec la loi du demi-cercle qui est symétrique par rapport à 0) décroît comme  $e^{-cN^2}$ .

La température ne modifie donc pas, à cet ordre, le comportement champ moyen du système (ce qui n'est pas le cas si on remplace  $\beta$  par  $\beta/N$ : on a alors une mesure d'équilibre modifiée, qui s'étale avec la température, minimisant  $\beta\mathcal{I}_V(\mu) + \int \mu \log \mu$ ).

#### 4. AU-DELÀ DU CHAMP MOYEN

Pour observer par exemple l'effet de la température (voir Figure 3) il est donc aussi intéressant d'aller au-delà de la limite champ moyen: en développant l'énergie  $\mathcal{H}_N$  à l'ordre suivant, on a en même temps accès à des informations sur le comportement *microscopique* typique des configurations. Notons que l'échelle microscopique, distance typique attendue entre plus proches voisins, est  $N^{-1/d}$ .



FIGURE 3. Cas (1.2) avec  $N = 100$  et  $V(x) = |x|^2$ , pour  $\beta = 400$  (gauche) et  $\beta = 5$  (droite).

**4.1. Rigidité et fluctuations gaussiennes.** Pour des minimiseurs de  $\mathcal{H}_N$  ou des configurations typiques sous la loi (1.7), puisqu'on sait déjà que  $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$  est petit, on sait par exemple que la *discrédance* sur des boules  $B_r(x)$ , définie par

$$D(x, r) := \int_{B_r(x)} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N d\mu_V$$

est  $o(r^d N)$  pour  $r > 0$  fixé. On se demande alors si on peut raffiner cette estimation, et si elle reste vraie aux échelles mésoscopiques, c.a.d pour des  $r$  d'ordre  $N^{-\alpha}$  avec  $\alpha < 1/d$ , et à toute température. Cela correspondrait à un résultat de *rigidité*. On arrive en effet à prouver de tels résultats pour les minimiseurs de l'énergie. Pour les configurations avec température, dans le cas Coulomb bi-dimensionnel, on peut montrer une forme un peu différente d'un tel résultat: il est vrai quand on intègre  $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$  non pas sur une boule mais contre une fonction-test assez régulière. On arrive même à un résultat plus précis puisqu'on peut montrer que ces quantités convergent vers des gaussiennes de moyenne et variance explicites:

**Théorème 2** ([LS2]). *Dans le cas (1.2), supposons que  $V \in C^4$  et que  $\mu_V$  a un support connexe de bord régulier, noté  $\Sigma$ . Soit  $f \in C_c^3(\Sigma)$ , alors*

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) - N \int_{\Sigma} f d\mu_V$$

converges en loi vers une gaussienne de

$$\text{moyenne} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \Delta f \log \Delta V \quad \text{variance} = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2.$$

Ce résultat peut se localiser à des fonctions-test  $f$  supportées à des échelles  $N^{-\alpha}$ ,  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Il est également vrai pour des minimiseurs de l'énergie, prenant formellement  $\beta = \infty$ .

Pour une idée de la preuve, on renvoie aux notes de cours [Se4].

Ce résultat peut être interprété en termes de convergence vers un *champ libre gaussien*, une sorte d'analogie multidimensionnel du mouvement brownien. Notons qu'un résultat semblable a été obtenu dans Bauerschmidt-Bourgade-Nikula-Yau, et qu'il était précédemment connu pour  $\beta = 2$  et dans le cas logarithmique unidimensionnel pour tout  $\beta$ .

Si  $f$  est assez régulière, les fluctuations associées sont donc d'ordre 1, ce qui est bien plus petit que ce à quoi on pourrait s'attendre, par exemple en comparant au Théorème Central Limite standard ou une somme de variables indépendantes est plutôt d'ordre  $\sqrt{N}$ . Ce résultat indique donc une forte dépendance et rigidité des configurations de points. Le montrer en dimension plus grande ou pour des interactions plus générales reste une question ouverte.

**4.2. Ordre suivant dans l'énergie.** Comme on l'a indiqué ci-dessus, l'approche que nous employons (initée avec Etienne Sandier, et poursuivie avec Nicolas Rougerie, Mircea Petrache, et Thomas Leblé) consiste à étudier l'ordre suivant dans l'énergie en développant autour de la mesure  $N\mu_V$  qui en est formellement le minimiseur. Développant et utilisant la caractérisation (3.2), les termes "d'ordre 1" en  $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$  disparaissent et on se retrouve avec

$$(4.1) \quad \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) = N^2 \mathcal{I}_V(\mu_V) + F_N^{\mu_V}(x_1, \dots, x_N)$$

où

$$(4.2) \quad F_N^{\mu_V}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta^c} \mathbf{g}(x-y) d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V\right)(x) d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V\right)(y),$$

$\Delta$  désignant la diagonale de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . C'est un développement à l'ordre suivant de  $\mathcal{H}_N$  valable pour toute configuration.

L'énergie d'ordre suivant  $F_N^{\mu_V}$  est l'énergie coulombienne totale du système formé des  $N$  charge ponctuelles positives aux  $x_i$  et de la mesure négative  $-N\mu_V$ , qui a la même masse. Le but est ensuite de définir une limite quand  $N \rightarrow \infty$  de cette énergie, qui sera donc l'énergie coulombienne totale (par unité de volume) d'un système infini de charges positives et d'une charge négative, disons uniforme. Un tel système s'appelle en physique un *jellium*. La définition précise de cette énergie limite est un peu complexe, mais elle utilise de manière cruciale la nature coulombienne de l'interaction: en effet, puisque  $\mathbf{g}$  est le noyau du Laplacien, on observe que si  $h^\mu = \mathbf{g} * \mu$  est le potentiel électrostatique engendré par une distribution de charges  $\mu$  (d'intégrale nulle), alors  $h^\mu$  résout l'équation de Poisson

$$-\Delta h^\mu = c_d \mu$$

qui est une EDP elliptique et locale, et de plus on peut écrire

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbf{g}(x-y) d\mu(x) d\mu(y) = -\frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu \Delta h^\mu = \frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h^\mu|^2$$

à l'aide de la formule de Gauss-Green. Autrement dit on peut réécrire l'énergie d'interaction (qui fait intervenir une intégrale double) sous forme d'une intégrale simple d'une fonction

locale du potentiel électrostatique (ou coulombien) engendré par cette distribution, lui-même solution d'une équation locale. Dans le cas Riesz, ces manipulations peuvent être remplacées par des manipulations similaires, utilisant que  $g$  est le noyau d'un opérateur elliptique sous forme divergence, qui reste local.

A l'aide de cette observation, on parvient à définir une énergie de volume infini pour une configuration de points infinie  $\mathcal{C}$  neutralisée par une charge uniforme (disons  $-1$ ), via les solutions de

$$-\Delta H = c_d \left( \sum_{p \in \mathcal{C}} \delta_p - 1 \right).$$

On appelle cette énergie  $\mathbb{W}(\mathcal{C})$ . On peut en donner une forme explicite dans le cas où la configuration de points  $\mathcal{C}$  est périodique par rapport à un réseau  $\Lambda$ : s'il y a  $M$  points  $a_i$  sur la cellule fondamentale et si  $\mathbb{T}$  est le tore  $\mathbb{R}^d/\Lambda$ , on a (à constantes près)

$$\mathbb{W}(\mathcal{C}) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq M} G_{\mathbb{T}}(a_i, a_j)$$

où  $G_{\mathbb{T}}$  est la fonction de Green du tore.

On peut montrer que  $\mathbb{W}$  peut bien être dérivé comme la limite (en un certain sens) de la fonctionnelle  $F_N^{\mu\nu}$  de (4.1). Il s'ensuit à la fois un développement à l'ordre suivant du minimum de l'énergie  $\mathcal{H}_N$ , et le fait que les minimiseurs de  $\mathcal{H}_N$  doivent converger (après dilatation, presque partout relativement à l'origine de dilatation choisie) vers un minimiseur de  $\mathbb{W}$  (voir par exemple [Sel]).

On est donc amené à tenter de déterminer les minimiseurs de  $\mathbb{W}$ . Ce problème est hélas très difficile, sauf en dimension 1 où on peut montrer que le minimum de  $\mathbb{W}$  est atteint pour le réseau régulier  $\mathbb{Z}$ . A partir de la dimension 2, la question est ouverte, et le seul résultat positif est

**Théorème 3.** *L'unique minimiseur de  $\mathbb{W}$  parmi les réseaux de volume 1 en dimension 2 est le réseau triangulaire.*

Ici le réseau triangulaire signifie  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}e^{i\pi/3}$ , correctement dilaté, c.a.d exactement ce qu'on appelle le réseau d'Abrikosov en supraconductivité. Ce résultat partiel est en fait équivalent à un résultat de théorie des nombres connu depuis les années 50 sur la minimisation de la fonction zeta d'Epstein (voir [Mont] et références). Cela correspond à la minimisation de la hauteur d'un tore plat en géométrie d'Arakelov.

Comme ce réseau triangulaire s'observe expérimentalement dans les supraconducteurs, et qu'on a prouvé [SS] que la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau des supraconducteurs se ramène à celle de  $\mathbb{W}$ , il est naturel de conjecturer que le réseau triangulaire est un minimiseur global de l'énergie.

Le réseau triangulaire doit en principe selon une conjecture de Cohn-Kumar être un minimiseur universel en dimension 2 (c.a.d. minimiser une large class d'énergies d'interaction). Un rôle analogue est joué en dimensions 8 et 24 par les réseaux  $E_8$  et Leech, respectivement, qui sont les solutions du problème d'empilement optimal résolu très récemment [Coh]. Dans ces dimensions, la preuve de la minimalité universelle est proche.

En dimension  $d \geq 3$ , la minimisation de  $\mathbb{W}$  même parmi les réseaux est un problème ouvert (sauf en dimension 8 et 24). De la même manière, on peut imaginer que ce minimum relatif est un minimum global, mais on s'attend à ce que ce ne soit vrai qu'en basse dimension: en

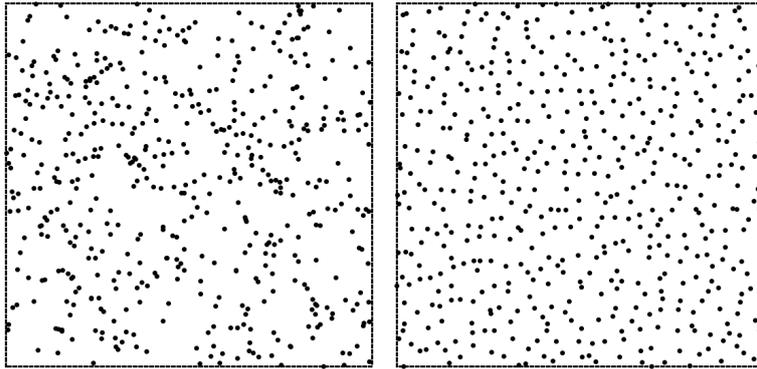


FIGURE 4. Simulation du processus de Poisson d'intensité 1 (gauche), et du processus de Ginibre (droite)

dimension  $d \geq 9$ , les simulations indiquent clairement que les minimiseurs ne sont pas des réseaux.

Ces questions font partie de la classe plus générale des questions de cristallisation, pour lesquelles on a très peu de résultats positifs dès que la dimension est supérieure ou égale à 2, voir la revue [BLe].

**4.3. Avec température.** Pour observer des effets de température intéressants, et aussi pour les applications en matrices aléatoires, il faut poser  $\beta_N = \beta N^{\frac{2}{d}-1}$ . Comme on l'a vu, le comportement macroscopique (ou "champ moyen") du système ne dépend pas de la température, il est donné par la mesure d'équilibre. On démontre que le comportement microscopique dépend de la température et est régi par la somme pondérée de l'énergie  $\mathbb{W}$  du paragraphe précédent, et d'une entropie relative. Pour formuler le résultat, il faut dilater les configurations par  $N^{-1/d}$  comme au paragraphe précédent, et parler du processus ponctuel limite  $P^x$  obtenu en moyennant près de chaque point  $x$ . Un processus ponctuel est ici une loi sur les configurations de points infinies. Par exemple le processus de Ginibre est obtenu en prenant la limite  $N \rightarrow \infty$  (après dilatation) de l'ensemble de Ginibre, le processus de Poisson  $\Pi$  (d'intensité 1 correspond à des points jetés indépendamment les uns des autres, de sorte que la probabilité d'avoir  $N(B)$  points dans un ensemble  $B$  est

$$\Pi(N(B) = n) = \frac{|B|^n}{n!} e^{-|B|}.$$

On définit alors une entropie relative dite "spécifique" notée  $\text{ent}[\cdot|\Pi]$  par rapport au processus de Poisson, qu'on peut voir comme mesurant combien le processus  $P$  est proche du processus de Poisson.

Pour tout  $\beta > 0$ , on définit la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\beta$

$$(4.3) \quad \mathcal{F}_\beta(P) := \int_{\Sigma} \frac{\beta}{2} \mathbb{W}(P^x) + \text{ent}[P^x|\Pi] dx,$$

où  $P = \int_{\Sigma} P^x dx$ . On peut alors formuler un résultat de grandes déviations.

**Théorème 4** ([LS1]). *Pour tous les cas (1.5), (1.2) et (1.3) avec  $d - 2 \leq s < d$ , sous des hypothèses de régularité sur  $V$  et  $\mu_V$ , pour tout  $\beta > 0$  on a un Principe de Grandes Déviations*

à vitesse  $N$  avec fonction de taux  $\mathcal{F}_\beta - \inf \mathcal{F}_\beta$ , dans le sens où

$$\mathbb{P}_{N,\beta}(P_N \simeq P) \simeq e^{-N(\mathcal{F}_\beta(P) - \inf \mathcal{F}_\beta)}.$$

De la sorte, la mesure de Gibbs  $\mathbb{P}_{N,\beta}$  se concentre sur les processus ponctuels qui minimisent  $\mathcal{F}_\beta$ . Cette minimisation résulte d'une compétition entre énergie et entropie. Quand  $\beta \rightarrow 0$ , l'entropie domine et on montre ainsi que les processus limites convergent vers des processus de Poisson. Quand  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\mathbb{W}$  domine, ce qui force heuristiquement les configurations à être plus "ordonnées" et à converger vers des minimiseurs de  $\mathbb{W}$ . Entre les deux on a des situations intermédiaires, et un problème ouvert est de savoir s'il y a un  $\beta$  critique correspondant à une cristallisation, ou transition de phase liquide-solide, qui est conjecturée pour le cas (1.2) dans certains articles de physique. En dimension 1 en revanche, on peut conclure à un vrai résultat de cristallisation quand la température tend vers 0, grâce au fait qu'on sait identifier les minimiseurs de  $\mathbb{W}$ .

Une conséquence de ce résultat est de fournir une interprétation variationnelle pour les quelques processus limites connus: le processus dit "sine- $\beta$ ", limite dans le cas (1.5) unidimensionnel, et le processus dit de Ginibre : ils doivent minimiser  $\beta\mathbb{W} + \text{ent}$ .

On aimerait obtenir davantage d'informations sur les processus ponctuels limites, notamment le comportement et la décroissance des "fonctions de corrélation à deux points", qui éclairerait sur l'existence de transitions de phase et la cristallisation, malheureusement ce théorème ne semble pas exploitable dans ce sens.

Comme on l'a vu, nombre de questions restent ouvertes, notamment celle de la cristallisation, l'identification des minimiseurs et du minimum de  $\mathbb{W}$  et de  $\mathcal{F}_\beta$ , la généralisation du Théorème 2 à la dimension  $d \geq 3$  et aux interactions de Riesz, et même à des interactions plus générales.

## REFERENCES

- [BLe] X. Blanc, M. Lewin, The Crystallization Conjecture: A Review, *EMS surveys* **2** (2015), 255–306.
- [Coh] H. Cohn, A conceptual breakthrough in sphere packing, *Notices AMS* **64** (2017), no. 2, 102–115.
- [Fo] P. J. Forrester, *Log-gases and random matrices*. London Mathematical Society Monographs Series, 34. Princeton University Press, 2010.
- [Go] F. Golse, On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit, in Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity, *Lect. Notes Appl. Math. Mech.* **3** (2016), 1-144.
- [Jab] P. E. Jabin, A review of the mean field limits for Vlasov equations. *Kinet. Relat. Models* **7** (2014), 661–711.
- [LS1] T. Leblé, S. Serfaty, Large Deviation Principle for Empirical Fields of Log and Riesz gases, *Invent. Math.* **210**, No. 3, 645–757.
- [LS2] T. Leblé, S. Serfaty, Fluctuations of Two-Dimensional Coulomb Gases, [arXiv:1609.08088](https://arxiv.org/abs/1609.08088).
- [MP] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*. Applied Mathematical Sciences, 96. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Mont] H. L. Montgomery, Minimal Theta functions. *Glasgow Math J.* **30**, (1988), No. 1, 75-85, (1988).
- [SK] E. Saff, A. Kuijlaars, Distributing many points on a sphere. *Math. Intelligencer* **19** (1997), no. 1, 5–11.
- [SS] E. Sandier, S. Serfaty, From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems, *Comm. Math. Phys.* **313** (2012), 635–743.
- [Se1] S. Serfaty, *Coulomb gases and Ginzburg-Landau vortices*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, 70, Eur. Math. Soc., 2015.
- [Se2] S. Serfaty, Mean Field Limits for the Gross-Pitaevskii and Parabolic Ginzburg-Landau Equations, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), no. 3, 713–768.
- [Se3] S. Serfaty, Mean Field Limit for Coulomb Flows, à paraître.

- [Se4] S. Serfaty, Microscopic description of Log and Coulomb gases, Lecture notes of the PCMI, [arXiv:1709.04089](https://arxiv.org/abs/1709.04089).
- [Sl] N. J. A. Sloane, The sphere packing problem, *Proceedings Internat. Congress Math. Berlin 1998*, Documenta Mathematika, III (1998), 387–396.
- [Spe] T. Spencer, Scaling, the free field and statistical mechanics, in The Legacy of Norbert Wiener: A Centennial Symposium, *Proc. Sympos. Pure Math* **60**, AMS, (1997).