Symboles de Manin et valeurs de fonctions L

Loïc Merel

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris-Diderot, UFR de Mathématiques, case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France
merel@math.jussieu.fr

À Yuri Ivanovich Manin à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire

1 Introduction

1.1 Les symboles de Manin

Soit N un entier > 0. Soit f une forme modulaire parabolique de poids $k = 2$ pour le groupe de congruence $\Gamma_1(N)$. Dans [10], Y. Manin lui associe une fonction $\xi_f : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{C}$ dont les valeurs sont les *symboles de Manin de* f. Cette fonction est définie ainsi.

Soit $(u, v) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. On pose $\xi_f(u, v) = 0$ si (u, v) n'est pas d'ordre N dans le groupe additif $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. Sinon on considère une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ telle que $(c, d) \in (u, v)$ et on pose

$$\xi_f(u, v) = -i \int_{g0}^{g\infty} f(z)dz,$$

où l'intégrale est prise le long d'un chemin continu du demi-plan de Poincaré. L'application $f \mapsto \xi_f$ est injective. On peut même être plus précis. Si on pose $\xi_f^+(u, v) = (\xi_f(u, v) + \xi_f(-u, v))/2$ et $\xi_f^-(u, v) = (\xi_f(u, v) - \xi_f(-u, v))/2$, les applications $f \mapsto \xi_f^+$ et $f \mapsto \xi_f^-$ sont injectives [10].

Rappelons en quoi cette construction est utile à l'étude des symboles modulaires : elle a notamment permis a Manin d'établir sa loi de réciprocité [10, 11, 14] et est souvent le fondement des calculs sur ordinateur concernant les formes modulaires (voir [5] et les tables de W. Stein).

Par ailleurs, les expressions (si utiles en vue de construire des fonctions L p-adique, d'établir des théorèmes de non-annulation...) en termes de symboles modulaires des valeurs en $s = 1$ des fonctions L des tordues de f ne font pas intervenir les symboles de Manin. C'est à ce lien manquant que fait référence notre titre. Notre objectif est, en réalité, inverse de ce qui est obtenu par la démarche classique : lorsque f est une forme primitive (*i.e.* propre pour l'algèbre de Hecke, nouvelle et normalisée), nous exprimons les symboles de Manin de f purement en termes des fonctions L des tordues f. Nous verrons même qu'il suffit de tordre f par des caractères de niveaux divisant N.

1.2 Analyse de Fourier multiplicative

Supposons désormais f primitive de niveau N. Nous calculons la transformée de Fourier multiplicative de ξ_f en le sens suivant.

Pour tout entier $m \geq 1$, on note Σ_m le support de m dans l'ensemble des nombres premiers. Supposons $(u, v) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ d'ordre N. Notons N' l'ordre de uv dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. Soit S un sous-ensemble de Σ_N contenant le support de u mais disjoint du support de v. Posons $\bar{S} = \Sigma_N - S$. On identifie $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ à $\cup_{d|N}(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ (par $w \mapsto wN'_w/N \pmod{N'_w}$, où N'_w est l'ordre de w dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$). Les images de u et v par cette identification sont uN'_S/N_S et $vN'_{\bar{S}}/N_{\bar{S}}$ respectivement ; les entiers N_S/N'_S et $N_{\bar{S}}/N'_{\bar{S}}$ ne dépendent pas du choix de S. Toute fonction $\xi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{C}$ s'écrit sous la forme

$$\xi(u, v) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\alpha(N'_{\bar{S}}v/N_{\bar{S}})\beta(N'_S u/N_S),$$

où $c_{\alpha,\beta}$ dépend seulement de ξ, α, β et N' et où α et β parcourent les caractères de Dirichlet primitifs de niveaux divisant N'. Le théorème 1 donne une forme explicite aux coefficients $c_{\alpha,\beta}$ lorsque $\xi = \xi_f$.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur à support dans Σ_N. Notons $f \otimes \chi$ la forme primitive dont le p-ième coefficient de Fourier est $a_p(f)\chi(p)$ (p nombre premier ne divisant pas N). Notons N_χ le niveau de $f \otimes \chi$. Notons $L(f \otimes \chi, s)$ la fonction L de $f \otimes \chi$. Elle admet un développement en série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f \otimes \chi)/n^s$ et en produit eulerien $\prod_p L_p(f \otimes \chi, p^{-s})$, où $L_p(f \otimes \chi, X) = 1/(1 - a_p(f \otimes \chi)X + a_{p,p}(f \otimes \chi)p^{k-1}X^2)$ (p nombre premier) ; on complète ce produit pour former

$$\Lambda(f \otimes \chi, s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)N_\chi^{s/2}L(f \otimes \chi, s).$$

On pose $a_p = a_p(f)$ et $a_{p,p} = a_{p,p}(f)$. Notons ψ le caractère de Dirichlet vérifiant $\psi(p) = a_{p,p}(f)$ (p nombre premier ne divisant pas N). On pose $\bar{f} = f \otimes \bar{\psi}$, et on a $a_n(\bar{f}) = \bar{a}_n(f)$ (n entier ≥ 1).

Lorsque T^+ et T^- sont des ensembles finis de nombres premiers, on prive $\Lambda(f \otimes \chi, s)$ de certains facteurs d'Euler en posant

$$\Lambda^{[T^+,T^-]}(f \otimes \chi, s) = \frac{\Lambda(f \otimes \chi, s)}{\prod_{p \in T^+} L_p(f \otimes \chi, p^{-s}) \prod_{p \in T^-} L_p(\bar{f} \otimes \bar{\chi}, p^{s-k})}.$$

Lorsque R^+ et R^- sont des sous-ensembles de T^+ et T^- respectivement, on pose

$$\Lambda^{[\frac{T^+}{R^+},\frac{T^-}{R^-}]}(f\otimes\chi,s)=\frac{\Lambda^{[T^+-R^+,T^--R^-]}(f\otimes\chi,s)}{\prod_{p\in R^+}L_p(f\otimes\chi,p^{-s-1}\prod_{p\in R^-}L_p(\bar f\otimes\bar\chi,p^{s-k+1})}.$$

Nous dirons que les nombres premiers p qui vérifient $v_p(N)=1$ (où v_p est la valuation p-adique) et ψ non ramifié en p sont *spéciaux* pour f (ils correspondent aux représentations spéciales de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Notons Σ_f l'ensemble des nombres premiers spéciaux pour f. Le cas qui nous intéressera est le cas où R^+ et R^- sont composés de nombres premiers spéciaux pour f.

Pour S sous-ensemble de Σ_N et M nombre entier ≥ 1 de support $\Sigma_M\subset\Sigma_N$, posons $M=M_SM_{\bar S}$ où M_S et $M_{\bar S}$ sont à supports dans S et $\bar S$ respectivement. On pose $S(M)=\Sigma_M\cap S$ et $\bar S(M)=\Sigma_M\cap\bar S$. On note $w_S(\bar f\otimes\chi)$ la pseudo-valeur propre de $\bar f\otimes\chi$ pour l'opérateur d'Atkin-Lehner associé à S (voir [1] ou la mise au point de la section 2.2). On note de plus $w(f\otimes\chi)=w_{\Sigma_N}(f\otimes\chi)$; on a

$$\Lambda^{[T^+,T^-]}(f\otimes\chi,s)=i^kw(f\otimes\chi)\Lambda^{[T^-,T^+]}(\bar f\otimes\bar\chi,k-s).$$

Pour α caractère de niveau à support dans Σ_N, on convient de décomposer α sous la forme $\alpha=\alpha_S\alpha_{\bar S}$, où α_S et $\alpha_{\bar S}$ sont des caractères de Dirichlet de niveaux à supports dans S et $\bar S$ respectivement.

Pour $p\in\Sigma_N$ et χ caractère de Dirichlet, notons m_χ le conducteur du caractère primitif associé à χ divisant N et $Q_{p,f,\chi}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$Q_{p,f,\chi}(X)=(\bar a_pp^{1-k/2})^{v_p(N'/m_\chi)}$$

sauf si $a_p=0$, $v_p(N')=1$ et $v_p(m_\chi)=0$, auquel cas on a

$$Q_{p,f,\chi}(X)=-\bar\chi(p)X^{-1}.$$

Cet objet désagréable dépend de p, a_p, $\chi(p)$, $v_p(m_\chi)$, k et $v_p(N')$; c'est donc un objet local. De plus on note $\tau'(\chi)$ la somme de Gauss associée au caractère primitif provenant de χ. Notons ϕ la fonction indicatrice d'Euler.

Théorème 1. *On a*

$$\begin{aligned}\xi_f(u,v)=\frac{w(f)}{\phi(N')}\sum_\chi\chi_{\bar S}(m_{\chi,S})(\bar\psi_S\bar\chi_S)(m_{\bar\psi\bar\chi,\bar S})\chi_S(-1)\frac{\tau'(\chi_S)\tau'(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi_{\bar S})}{\sqrt{N_\chi}}\\ (\prod_{p\in S(N')}Q_{p,f,\bar\chi}(1))(\prod_{p\in\bar S(N')}Q_{p,f,\chi\psi}(1))(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi_{\bar S}^2)(N_{\chi,S})\overline{w_S(f\otimes\chi)}\\ \Lambda^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f},\frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}(f\otimes\chi,1)(\bar\psi\bar\chi)(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})\chi(\frac{N'_Su}{N_S}),\end{aligned}$$

où χ parcourt les caractères de Dirichlet primitifs tels que $m_{\chi,S}m_{\psi\chi,\bar S}|N'$. La formule analogue pour ξ_f^+ (resp. ξ_f^-) est obtenue en faisant disparaître les termes pour χ impair (resp. pair).

1.3 Interprétation arithmétique

La formule du théorème 1 est si peu aisément manipulable, si inapte à s'insérer dans le langage naturel, que le lecteur séduit par le point de vue exposé par Manin dans son essai "Mathematics as Metaphor" [12] pourrait penser qu'elle présente bien peu d'intérêt. Nous espérons que les conséquences qui suivent peuvent effacer cette impression.

Il procède d'un examen superficiel du théorème 1 et de l'injectivité des applications $f \mapsto \xi_f^+$ et $f \mapsto \xi_f^-$ l'énoncé suivant.

Corollaire 2. *La forme modulaire f primitive de poids 2 pour $\Gamma_1(N)$ est caractérisée par les données suivantes, où on fait parcourir à χ les caractères de Dirichlet pairs (resp. impairs) de conducteurs divisant N :*
(i) le caractère de f,
(ii) les niveaux des formes primitives $f \otimes \chi$,
(iii) les pseudo-valeurs propres $w_S(f \otimes \chi)$,
(iv) les facteurs d'Euler $L_p(f \otimes \chi, p^{-s})$, pour $p \in \Sigma_N$ et
(v) les nombres complexes $\Lambda(f \otimes \chi, 1)$.

Nous sommes donc tentés de voir la fonction ξ_f comme une façon commode de comprimer et de manipuler les données (i), (ii), (iii), (iv) et (v).

On pourrait rendre l'énoncé et la démonstration du théorème 1 plus agréables en employant le langage adélique. Les données *(i)*, *(ii)* *(iii)* et *(iv)* sont équivalentes à celles issues des facteurs d'Euler et des facteurs ϵ associés aux représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ provenant de f après torsion par des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ de conducteur $\leq v_p(N)$, pour $p \in \Sigma_N$.

On est tenté de rapprocher le corollaire 2 du théorème de Hecke-Weil [17] sur la caractérisation, par les prolongements analytiques et les équations fonctionnelles, des séries de Dirichlet qui proviennent des formes modulaires, voir la section 3.3. Nous avons à l'esprit tout spécialement la version précise due à W. C. W. Li [8] qui, comme le corollaire 2, ne fait intervenir que les tordues par les caractères de conducteur divisant le niveau N. On précisera dans la section 3.2, comment, à partir de ξ_f, on peut retrouver les invariants (i), (ii), (iii), (iv) et (v) notamment lorsque f est de niveau minimal parmi ses tordues par des caractères de Dirichlet, auquel cas nous essaierons d'indiquer en quoi l'information contenue dans ξ_f est optimale.

Notre travail ne semble pas présenter de lien avec le théorème de Luo et Ramakrishnan [9] qui caractérise f par les nombres complexes $L(f \otimes \chi, 1)$ où χ parcourt une infinité de caractères quadratiques.

Il résulte du théorème 1 un énoncé de théorie analytique des nombres.

Corollaire 3. *Il existe des caractères de Dirichlet χ^+ et χ^-, pair et impair respectivement, de conducteurs divisant N et tels que $L(f \otimes \chi^+, 1) \neq 0$ et $L(f \otimes \chi^-, 1) \neq 0$.*

En raison de la modularité des courbes elliptiques [3] et des résultats obtenus par Kato [6] sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et ses variantes, on obtient des conséquences diophantiennes dont voici l'exemple type.

Corollaire 4. *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ de conducteur N. Soit $\mathbf{Q}(\mu_N)$ une extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ engendrée par une racine primitive N-ième de l'unité. Notons $\mathbf{Q}(\mu_N)^+$ le plus grand sous-corps totalement réel de $\mathbf{Q}(\mu_N)$. La représentation régulière du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_N)^+/\mathbf{Q})$ *n'intervient pas dans le* $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_N)^+/\mathbf{Q})$*-module* $E(\mathbf{Q}(\mu_N)^+)$.

Le lecteur pourra trouver des généralisations du corollaire 4 pour les groupes de Selmer p-adiques des motifs associés aux formes modulaires, en s'appuyant sur [6]. Nous nous demandons s'il existe une direction directe (*i.e.* ne faisant pas appel aux formes modulaires) du corollaire 4.

1.4 Perspectives

Comme ξ_f détermine f, on peut, en principe, exprimer tout invariant associé à f en terme de ξ_f, puis en combinant avec le théorème 1, en terme des données (i), (ii), (iii), (iv) et (v). Ce principe appliqués aux valeurs de fonctions L construites à partir de f (via des puissances tensorielles, la torsion par des caractères etc) produirait alors des identités numériques entre valeurs de fonctions L. Nous donnons un exemple de telles identités dans la section 4. Dans sa thèse, F. Brunault exprime $L(f,2)$ en termes des ξ_f [4], qu'on peut combiner avec le théorème 1. Y a-t-il une théorie systématique ?

2 Formulaire préliminaire

Cette section consiste en des mises au points concernant des questions essentiellement déjà connues. Elles concernent en 2.1 la suppression des facteurs d'Euler des fonctions L, en 2.2 les opérateurs d'Atkin-Lehner, en 2.3 et 2.4 la torsion des formes modulaires par des caractères non nécessairement primitifs, en 2.5 la translation des formes modulaires par des nombres rationnels. Dans les sections 2.6 à 2.8, qui ne seront pas utiles avant la section 3.2, nous rappelons ce qui est connu sur le comportement aux mauvaises places des formes modulaires tordues. Pour tout cela nous avons trouvé une aide précieuse dans un article d'Atkin et Li [2].

2.1 Suppression des facteurs d'Euler

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ formé par les matrices de déterminant > 0. On pose, pour $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, et F forme primitive de poids k et de niveau M :

$$F_{|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}(z) = \frac{(AD-BC)^{k/2}}{(Cz+D)^k} F(\frac{Az+B}{Cz+D}).$$

Cette opération s'étend $\mathbf{C}$-linéairement à $\mathbf{C}[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+]$; elle se factorise par $\mathbf{C}[\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q})^+]$. Gardons à l'esprit la formule suivante

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(F,s)=\int_0^\infty F(iy)y^s\frac{dy}{y}.$$

On a, pour $h=\begin{pmatrix}A&0\\0&D\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$,

$$\int_0^\infty F_{|h}(iy)y^s\frac{dy}{y}=(\frac{A}{D})^{k/2-s}\int_0^\infty F(iy)y^s\frac{dy}{y}=(\frac{A}{D})^{k/2-s}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(F,s).$$

Soient T^+ et T^- deux ensembles de nombres premiers. On pose

$$F^{[T^+,T^-]}=F_{|\prod_{p\in T^+}L_p(F,p^{-k/2}\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix})^{-1}\prod_{p\in T^-}L_p(\bar F,p^{-k/2}\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix})^{-1}},$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F^{[T^+,T^-]}(iy)y^s\frac{dy}{y}&=\frac{(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(F,s)}{\prod_{p\in T^+}L_p(F,p^{-s})\prod_{p\in T^-}L_p(\bar F,p^{s-k})}\\&=M^{-s/2}\Lambda^{[T^+,T^-]}(F,s).\end{aligned}$$

On pose, lorsque R^+ et R^- sont des sous-ensembles de T^+ et T^- respectivement,

$$F^{[\frac{T^+}{R^+},\frac{T^-}{R^-}]}=F^{[T^+-R^+,T^--R^-]}_{|\prod_{p\in R^+}L_p(F,p^{1-k/2}\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix})^{-1}\prod_{p\in R^-}L_p(\bar F,p^{1-k/2}\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix})^{-1}}$$

si bien que

$$\int_0^\infty F^{[\frac{T^+}{R^+},\frac{T^-}{R^-}]}(iy)y^s\frac{dy}{y}=M^{-s/2}\Lambda^{[\frac{T^+}{R^+},\frac{T^-}{R^-}]}(F,s).$$

2.2 Opérateurs d'Atkin-Lehner

Mettons au point les normalisations pour les opérateurs d'Atkin-Lehner. Notons ψ' le caractère de nebentypus de F. Notons M' le conducteur de ψ'. Supposons que M soit à support dans Σ_N. Soit S un sous-ensemble de Σ_M. Notons $\bar S=\Sigma_M-S$. Posons $M=M_SM_{\bar S}$ et $M'=M'_SM'_{\bar S}$ et $\psi'=\psi'_S\psi'_{\bar S}$. Soit $\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ telle que $M_S|A$, $M_S|D$, $M|C$, $M_{\bar S}|B$, $AD-BC=M_S$, $A\equiv M_S\pmod{M'}$ et $B\equiv 1\pmod{M'_S}$; on pose alors, comme Atkin et Li dans [2], $W_SF=F_{|\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}}$ et il existe un nombre complexe $w_S(F)$ de module 1 tel que $W_S F = w_S(F) F \otimes \bar{\psi}'_S$. Lorsque $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ avec $M_S|A$, $M_S|D$, $M|C$, $M_{\bar{S}}|B$ et $AD - BC = M_S$, on a de plus [2]

$$F_{|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = \psi'_S(B)\psi'_{\bar{S}}(A/M_S) W_S F.$$

Lorsque $M|NN'$, $M'|N$ et lorsque $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifie les conditions $N_S N'_S|A$, $N_S N'_S|D$, $NN'|C$, $N_{\bar{S}} N'_{\bar{S}}|B$ et $AD - BC = N_S N'_S$, on a

$$F_{|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = w_S(F)\bar{\psi}'_S(B)\bar{\psi}'_{\bar{S}}(A/(N_S N'_S)) F_{|\begin{pmatrix} N_S N'_S/M_S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Lorsque S est égal au support de M, on pose $w_S(F) = w(F)$.

On a de plus [2] proposition 1.1,

$$w_S(F) w_S(F \otimes \bar{\psi}'_S) = \psi'_S(-1)\bar{\psi}'_{\bar{S}}(M_S). \tag{1}$$

Mentionnons enfin la formule, pour S_1 et S_2 deux sous-ensembles disjoints de Σ_M,

$$W_{S_2}(W_{S_1} F) = \psi'_{S_2}(M_{S_1}) W_{S_1 \cup S_2} F.$$

Cela permet de ramener le calcul de $w_S(F)$ aux cas où S est un singleton.

Ajoutons la formule suivante. Soit p un nombre premier tel que $a_p(F) \neq 0$ (c'est le cas si et seulement si $v_p(M) = v_p(m_\psi)$ ou si $v_p(M) \leq 1$). On a

$$w_{\{p\}}(F) = \frac{p^{v_p(N)(k/2-1)}\tau(\psi'_S)}{a_p(F)^{v_p(N)}}$$

où $\tau(\psi'_S)$ est la somme de Gauss du caractère (non nécessairement primitif) ψ'_S. Si p est spécial pour F, on a $a_p(F)\bar{a}_p(F) = p^{k-2}$.

2.3 Torsion des formes modulaires par des caractères quelconques

Revenons maintenant sur la torsion des formes modulaires par des caractères. Soit α un caractère de Dirichlet de niveau m, de caractère de Dirichlet primitif associé ω, lui-même de conducteur m_ω. Notons $\bar{f}_\alpha$ la forme modulaire (non nécessairement primitive) donnée par le développement

$$\bar{f}_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \alpha(n) q^n.$$

Elle est liée à la forme primitive $\bar{f} \otimes \omega$ par la formule

$$\bar{f}_\alpha = (\bar{f} \otimes \omega)^{[\Sigma_m, \emptyset]}.$$

Posons de plus

$$S_\alpha \bar{f} = \sum_{a \bmod m} \bar{\alpha}(a) \bar{f}_{|\begin{pmatrix} 1 & a/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

On a, lorsque α est primitif (et donc égal à ω),

$$S_\omega \bar{f} = \tau(\bar{\omega}) \bar{f}_\omega.$$

Soit p un nombre premier divisant m/m_ω. Notons β le caractère de Dirichlet de niveau m/p qui coïncide avec α sur les entiers premiers à p. On a

$$S_\alpha \bar{f} = \bar{a}_p p^{1-k/2} (S_\beta \bar{f})_{|\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} - \bar{\beta}(p) S_\beta \bar{f}.$$

Posons, dans $\mathbf{C}[X]$,

$$R_p(X) = (\bar{a}_p p^{1-k/2} X)^{v_p(m/m_\omega)-1} (\bar{a}_p p^{1-k/2} X - \bar{\omega}(p)). \tag{2}$$

Par une application répétée de la formule 2, on obtient

$$S_\alpha \bar{f} = \tau(\bar{\omega}) (\bar{f}_\omega)_{|\prod_p R_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})},$$

où le produit porte sur les nombres premiers divisant m/m_ω.

Il est nécessaire maintenant de distinguer plusieurs cas. Si $v_p(m/m_\omega) = 0$, on a $R_p = 1$. Si $v_p(m/m_\omega) = 1$ et $a_p = 0$, on a $R_p = 0$. Si $v_p(m/m_\omega) > 1$ et $a_p = 0$, on a $R_p = -\bar{\omega}(p)$.

Or on a, lorsque $a_p \neq 0$ et $p|N$ non spécial pour $\bar{f}$, $a_p \bar{a}_p = p^{k-1}$ et donc, lorsque de plus $p|m$ on a, dans $\mathbf{C}[\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q})^+]$,

$$R_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = (\bar{a}_p p^{1-k/2} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{v_p(m/m_\omega)} (1 - \bar{\omega}(p) a_p p^{-k/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}).$$

Cette dernière formule est encore valable lorsque $a_p = 0$ et $v_p(m) > 1$.

Lorsque $p|(m/m_\omega)$ et p est spécial pour $\bar{f}$, on a $a_p \bar{a}_p = p^{k-2}$ (et donc $a_p \neq 0$). On a donc

$$R_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = (\bar{a}_p p^{1-k/2} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{v_p(m/m_\omega)} (1 - \bar{\omega}(p) a_p p^{1-k/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}).$$

Lorsque $a_p = 0$, $v_p(m) = 1$ et $v_p(m_\omega) = 0$, on a

$$R_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = -\bar{\omega}(p).$$

On a donc

$$S_\alpha \bar{f} = \tau(\bar{\omega}) (\bar{f} \otimes \omega)^{[\Sigma_m, \frac{\Sigma_{m/m_\omega}}{\Sigma_{m/m_\omega} \cap \Sigma_f}]}_{|\prod_p P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}, \tag{3}$$

où le monôme $P_p(X)$ vaut $(\bar{a}_p p^{1-k/2} X)^{v_p(m/m_\omega)}$ sauf si $a_p = 0$, $v_p(m) = 1$ et $v_p(m_\chi) = 0$, auquel cas on a $P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = -\bar{\omega}(p)$.

2.4 La torsion des formes modulaires par des caractères de niveaux divisant N

Reprenons la situation laissée en 2.3 en nous plaçant dans le cas où $N' = m$ est un diviseur de N.

Lemme 5. *Soit p un nombre premier tel que $p|m_\omega$ et $p|(N'/m_\omega)$. On a*

$$(\bar{f} \otimes \omega)^{[\emptyset,p]}_{|P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})} = (\bar{f} \otimes \omega)_{|P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}.$$

Démonstration Il suffit de montrer que $P_p = 0$ ou que $a_p(\bar{f} \otimes \omega) = 0 = a_{p,p}(\bar{f} \otimes \omega)$. Supposons $P_p \neq 0$. Si $a_p = 0$, on a $v_p(m_\omega) = 0$ et $v_p(N') = 1$, ce qui entraîne $a_p(\bar{f} \otimes \omega) = 0 = a_{p,p}(\bar{f} \otimes \omega)$. Restreignons maintenant notre attention au cas où $a_p \neq 0$. Rappelons d'abord que cela entraîne que le conducteur de ψ a pour valuation p-adique $v_p(N)$ (ce qui entraîne $a_{p,p}(\bar{f} \otimes \omega) = 0$) ou que $v_p(N) = 1$. Les hypothèses excluent le cas $v_p(N) = 1$. On a de plus $a_p(\bar{f} \otimes \omega) \neq 0$ si et seulement si ω est de conducteur premier à p (impossible par hypothèse) ou $\bar{\psi}/\omega$ est de conducteur premier à p; ce dernier cas est impossible, en effet on a $p|(N'/m_\omega)$, et donc $p|(N/m_\omega)$ et les valuations p-adiques des conducteurs de ψ et $\bar{\psi}/\omega$ sont égales et donc non nulles. On a bien $a_p(\bar{f} \otimes \omega) = 0$.

On a donc, par applications répétées du lemme 5 à la formule 3,

$$S_\alpha \bar{f} = \tau(\bar{\omega})(\bar{f} \otimes \omega)^{[\Sigma_{N'}, \frac{\Sigma_{N'} - \Sigma_{m_\omega}}{(\Sigma_{N'} - \Sigma_{m_\omega}) \cap \Sigma_f}]}_{|\prod_p P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}, \tag{4}$$

2.5 La torsion des formes modulaires par des caractères additifs

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Récrivons la forme modulaire $\bar{f}_{|\begin{pmatrix} 1 & n/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ comme combinaison linéaire de $F_{\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ où d parcourt les diviseurs de N et où F parcourt les formes primitives de niveau divisant N^2/d. Nous ne savons pas si un pareil calcul a déjà été rédigé. Notons n' le nombre entier et N' le diviseur > 0 de N qui vérifient $n'/N' = n/N$. On a, par inversion de Fourier,

$$\bar{f}_{|\begin{pmatrix} 1 & n'/N' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sum_\alpha \frac{\alpha(n')}{\phi(N')} S_\alpha \bar{f},$$

où α parcourt les caractères de Dirichlet de niveau N'. En combinant avec la formule 4, on obtient

$$\bar{f}_{|\begin{pmatrix} 1 & n/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sum_{\omega} \frac{\omega(n')}{\phi(N')} \tau(\bar{\omega}) (\bar{f} \otimes \omega)^{[\Sigma_{N'}, \frac{\Sigma_{N'} - \Sigma_{m_\omega}}{(\Sigma_{N'} - \Sigma_{m_\omega}) \cap \Sigma_f}]}_{|\prod_p P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})} \tag{5}$$

où ω parcourt les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur m_ω divisant N', le produit portant sur les nombres premiers divisant N'/m_ω.

2.6 Invariants locaux des tordues de formes modulaires, première analyse

On reprend les notations de 2.1 et 2.2. Soient n un entier > 0. Supposons m_χ et N_S premiers entre eux. On a $a_n(f \otimes \chi) = a_n \chi(n)$ et

$$w_S(f \otimes \chi) = \bar{\chi}(m_\chi) w_S(f).$$

De plus si N est premier à m_χ, le caractère de $f \otimes \chi$ est $\psi\chi^2$ et on a $N_\chi = N m_\chi^2$.

Nous allons maintenant étudier les cas où m_χ, N_S et n ne sont pas premiers entre eux.

Soit p un nombre premier. On dit que f est *p-primitive par torsion* si pour tout caractère de Dirichlet χ de conducteur une puissance de p, le niveau de $f \otimes \chi$ est $\geq N$. C'est évidemment une propriété locale, qui serait peut-être davantage mise en valeur par le langage adélique. On suppose que m_χ, N_S et n sont des puissances de p et que f est p-primitive par torsion.

Notons $(\psi\chi)_0$ le caractère primitif associé à $\psi\chi$. On a

$$L_p(f \otimes \chi, X)^{-1} = 1 - \frac{\bar{a}_p (\psi\chi)_0(p)}{p} X.$$

Comme on a

$$f_\chi = f \otimes \chi_{|L_p(f \otimes \chi, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{-1}}.$$

On a donc, puisque χ est primitif,

$$f \otimes \chi = f_{\chi_{|(1 - \frac{\bar{a}_p(\psi\chi)(p)}{p} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{-1}}}.$$

Pour progresser dans l'étude des invariants de $f \otimes \chi$, il faut distinguer deux cas [2],

– on a $a_p(f) \neq 0$ (cas de *série principale*), cela assure que f est primitive par torsion, ou

– on a $a_p(f) = 0$ et le conducteur du caractère de Dirichlet primitif associé à ψ est de valuation p-adique $\leq v_p(N)/2$ (cas *supercuspidal*). (Cette dernière condition n'entraîne pas que f est p-primitive, voir [2].)

2.7 Invariants locaux des tordues de formes modulaires, cas de série principale

Reprenons la situation laissée en 2.6 en supposant $a_p \neq 0$. On suppose χ non trivial. Le niveau N_χ de $f \otimes \chi$ est donné par la recette suivante [2]. On a

$$v_p(N_\chi) = v_p(m_\chi m_{\psi\chi}).$$

On a [2] théorème 4.1,

$$w_S(f \otimes \chi) = \bar{\psi}_{\bar{S}}(m_\chi)\chi(-1)\frac{\tau(\psi_S \chi)}{\tau(\bar{\chi})}$$

si $v_p(m_\chi) \geq v_p(N)$ et $v_p(m_{\chi\psi}) = v_p(m_\chi)$. On a de plus, [2] théorème 4.2,

$$w_S(f \otimes \chi) = \bar{\psi}_{\bar{S}}(m_\chi)\chi(-1)(\frac{N_S}{m_\chi})^{k/2-1}\frac{\tau(\psi_S \chi)}{a_{N_S/m_\chi}(f)\tau(\bar{\chi})}$$

si $v_p(m_\chi) < v_p(N)$. On a enfin, [2] corollaire 4.2,

$$w_S(f \otimes \chi) = \bar{\psi}_{\bar{S}}(m_\chi)\chi(-1)\frac{\tau(\psi_S \chi)}{\tau(\bar{\chi})}$$

si $v_p(m_\chi) = v_p(N)$ et $v_p(m_{\chi\psi}) < v_p(m_\chi)$.

2.8 Invariants locaux des tordues de formes modulaires, cas supercuspidal

Reprenons la situation laissée en 2.6 en supposant $a_p = 0$. On a

$$v_p(N_\chi) = \max(v_p(m_\chi^2), v_p(m_\psi m_\chi), v_p(N))$$

Posons au préalable, pour tout caractère de Dirichlet primitif ω $m'_\omega = m_\omega$ si $\omega(p) \neq 0$ et $m'_\omega = pm_\omega$ si $\omega(p) = 0$ On a, [2] théorème 4.1,

$$w_S(f \otimes \chi) = \bar{\psi}_{\bar{S}}(m_\chi)\chi(-1)\frac{\tau(\psi_S \chi)}{\tau(\bar{\chi})}$$

si $v_p(m_\chi) \geq v_p(N)$. On a enfin, [2] théorème 4.5,

$$w_S(f \otimes \chi) = w_S(f)\frac{\psi_{\bar{S}}(N_S/m_\chi)\chi(-1)\psi_S(-1)}{(N''_{\chi,S}/N_S)\phi(N_S/m_\chi)}\frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sum_\omega \tau(\omega)\tau(\chi\psi_S\omega)w_{f\otimes\bar{\psi}_S\bar{\omega}}.$$

si $v_p(m_\chi) < v_p(N)$, où $N''_{\chi,S} = \max(N_S, N_S m_\psi/m_\chi, N_S^2/m_\chi^2)$ et où ω parcourt les caractères de Dirichlet tels que $m'_\omega = N_S/m_\chi$ et $m_{\chi\psi_S\omega} = N''_{\chi,S}m_\chi/N_S$. En particulier, lorsque $v_p(m_\chi) > v_p(N)/2$, $w_S(f \otimes \chi)$ se déduit de la collection des $w_S(f \otimes \omega)$, pour ω caractère vérifiant $m_\omega^2 | N_S$; en particulier, lorsque $v_p(m_\chi) > v_p(N)/2$, $w_S(f \otimes \chi)$ se déduit de la collection des $w_S(f \otimes \omega)$ pour $N_{\omega,S} = N_S$.

2.9 Invariants locaux des tordues de formes primitives par torsion, conclusion

Supposons f primitive par torsion (c'est-à-dire p-primitive par torsion pour tout nombre premier p). La donnée de $a_p(f)$ et de $w_S(f\otimes\omega)$ ($p\in\Sigma_N$, $S\subset\Sigma_N$, et ω caractère primitif tel que $N_\omega=N$ et $a_r(f)=0$ ($r\in S$ et $r|m_\chi$)) détermine N_χ, $a_p(f\otimes\chi)$, $w_S(f\otimes\chi)$ ($p\in\Sigma_N$, $S\subset\Sigma_N$).

3 Le théorème 1 et ses corollaires

3.1 La démonstration du théorème 1

Soit $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ telle que la classe modulo N de (c,d) soit égale à (u,v).

On peut comprendre notre démarche ainsi. La fonction $f_{|g}$ est une forme modulaire pour le groupe de congruence $\Gamma(N)$, si bien que la fonction $f_{|g\begin{pmatrix} N & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$ est modulaire pour le groupe de congruence $\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(N^2)$. Cette dernière forme modulaire s'écrit donc comme combinaison linéaire de fonctions du type $F_{|\begin{pmatrix} d & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$, où F parcourt les formes primitives de niveau M divisant N^2 et d les entiers divisant N^2/M. Nous allons montrer que les formes primitives qui interviennent dans cette écriture sont de la forme $f\otimes\chi$, où χ parcourt les caractères de Dirichlet de niveau divisant N et donner explicitement les coefficients de cette combinaison linéaire.

Lorsque $k=2$, on a $\xi_f(u,v)=\int_0^\infty f_{|g}(iy)\,dy$. Lorsque, de plus, $s=1$ et h est une matrice diagonale de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q})^+$, et χ est un caractère de Dirichlet de conducteur divisant N, on a

$$\int_0^\infty (f\otimes\chi)_{|h}(iy)dy=\frac{1}{2\pi}L(f\otimes\chi,1)=\frac{1}{\sqrt{N_\chi}}\Lambda(f\otimes\chi,1).$$

C'est pourquoi le théorème 1 se déduit de la proposition 6 suivante, par intégration de chaque membre de l'égalité ci-dessous le long de la géodésique reliant 0 à ∞ dans le demi-plan de Poincaré.

Remarquons que la proposition 6 permet de démontrer des analogues du théorème 1 pour les formes modulaires de poids $\neq 2$. (Voir par exemple la thèse de F. Martin lorsque $k=1$ [13].)

Proposition 6. *On a*

$$f_{|g}=\frac{w(f)}{\phi(N')}\sum_{\chi}\chi_{\bar S}(m_{\chi,S})(\bar\psi_S\bar\chi_S)(m_{\psi\chi,\bar S})(\psi_S\chi_S)(-1)\tau'(\chi_S)\tau'(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi_{\bar S})$$

$$(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi^2_{\bar S})(N_{\chi,S})\overline{w_S(f\otimes\chi)}(\bar\psi\bar\chi)(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})\chi(\frac{N'_S u}{N_S})$$
$$(f\otimes\chi)^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f},\frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}{}_{|\begin{pmatrix}\frac{N'_{\bar S}}{N_{\chi,S}N_{\bar S}m_{\psi\chi,\bar S}} & 0\\ 0 & \frac{N'_S}{N_S m_{\bar\chi,S}}\end{pmatrix}(**)},$$

où χ parcourt les caractères de Dirichlet primitifs tel que $m_{\chi,S}m_{\psi\chi,\bar S}|N'$ et où

$$** = \prod_{p\in S(N')} Q_{p,f,\bar\chi}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\prod_{p\in\bar S(N')} Q_{p,f,\chi\psi}\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Démonstration.- Considérons $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ telle que $N_SN'_S|A$, $N_SN'_S|D$, $NN'|C$, $N_{\bar S}N'_{\bar S}|B$, $AD-BC=N_SN'_S$, $A\equiv uN'_S \pmod{N_{\bar S}}$ et $B\equiv v/N_{\bar S} \pmod{N_S}$. Soit $k\in\mathbf{Z}$ tel que $n\equiv uv \pmod{N_{\bar S}}$ et $n\equiv -uv \pmod{N_S}$. Notre point de départ réside dans l'identité

$$\Gamma_1(N)g=\Gamma_1(N)\begin{pmatrix}0 & -1\\ N & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n/N\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}NN'_S & 0\\ 0 & N_S\end{pmatrix}^{-1},$$

que le lecteur vérifiera grâce au lemme chinois. Comme $w(f)\bar f=f_{|\begin{pmatrix}0 & 1\\ -N & 0\end{pmatrix}}$, on a la formule

$$f_{|g}=w(f)\bar f_{|\begin{pmatrix}1 & n/N\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}NN'_S & 0\\ 0 & N_S\end{pmatrix}^{-1}},$$

et donc, d'après la formule 5,

$$f_{|g}=w(f)\sum_\omega\frac{\omega(n')}{\phi(N')}\tau(\bar\omega)(\bar f\otimes\omega)^{[\Sigma_{N'},\frac{\Sigma_{N'}-\Sigma_{m_\omega}}{(\Sigma_{N'}-\Sigma_{m_\omega})\cap\Sigma_f}]}{}_{|\prod_p P_p(\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}NN'_S & 0\\ 0 & N_S\end{pmatrix}^{-1}} \tag{6}$$

où ω parcourt les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur m_ω divisant N', le produit portant sur les nombres premiers divisant N'.

Appliquons les formules de 2.2 à $F=\bar f\otimes\omega$: on a $M=N_\omega$, $\psi'=\bar\psi\omega^2$ et $F\otimes\bar\psi'_S=\bar f\otimes\omega\psi_S\bar\omega^2_S=\bar f\otimes\psi_S\bar\omega_S\omega_{\bar S}=f\otimes\bar\psi_{\bar S}\bar\omega_S\omega_{\bar S}$.

Soit $p\in\Sigma_N$. Soit r un entier ≥ 0. On a

$$(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}p^r & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}}=(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}p^rA & B\\ C & D/p^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^r\end{pmatrix}}$$

si $p\in S$ et

$$(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}p^r&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}}=(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}A&p^rB\\C/p^r&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^r&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

si $p\in\bar S$. On a de plus les formules

$$(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}p^rA&B\\C&D/p^r\end{pmatrix}}=(\psi_S\bar\varpi_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(p^rA/(N_SN'_S))$$
$$w_S(\bar f\otimes\omega)(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\varpi_S\psi_S)_{|\begin{pmatrix}N_SN'_S/N_{\bar\omega,S}&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

lorsque $p^r|(N_SN'_S/N_{\omega,S})$ et

$$(\bar f\otimes\omega)_{|\begin{pmatrix}A&p^rB\\C/p^r&D\end{pmatrix}}=(\psi_S\bar\varpi_S^2)(p^rB)(\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))$$
$$w_S(\bar f\otimes\omega)(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\varpi_S\psi_S)_{|\begin{pmatrix}N_SN'_S/N_{\bar\omega,S}&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

lorsque $p^r|(N_{\bar S}N'_{\bar S}/N_{\omega,\bar S})$. Soit $P\in\mathbf{C}[X]$. On a alors

$$(\bar f\otimes\omega)_{|P\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}}=(\psi_S\bar\varpi_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))w_S(\bar f\otimes\omega)$$
$$(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\varpi_S\psi_S)_{|P((\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\frac{N_SN'_S}{N_{\bar\omega,S}}&0\\0&1\end{pmatrix}}.$$

si $p\in S$ et P de degré $\le v_p(N_SN'_S/N_{\omega,S})$ et on a

$$(\bar f\otimes\omega)_{|P\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}}=(\psi_S\bar\varpi_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))w_S(\bar f\otimes\omega)$$
$$(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\varpi_S\psi_S)_{|P((\psi_S\bar\varpi_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}\frac{N_SN'_S}{N_{\bar\omega,S}}&0\\0&1\end{pmatrix}}.$$

si $p\in\bar S$ et P de degré $\le v_p(N_{\bar S}N'_{\bar S}/N_{\omega,\bar S})$.

On en déduit que

$$(\bar f\otimes\omega)^{[\{p\},\emptyset]}_{|\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}}=(\psi_S\bar\varpi_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\varpi_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))$$
$$w_S(\bar f\otimes\omega)(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\varpi_S\psi_S)^{[\emptyset,\{p\}]}_{|\begin{pmatrix}N_SN'_S/N_{\bar\omega,S}&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

si et $p \in S$ et

$$(\bar f \otimes \omega)^{[\{p\},\emptyset]}|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\psi_S\bar\omega_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))$$

$$w_S(\bar f \otimes \omega)(\bar f \otimes \omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S)^{[\{p\},\emptyset]}_{|\begin{pmatrix} N_SN'_S/N_{\bar\omega,S} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

si $p \in \bar S$. Un calcul analogue donne les formules

$$(\bar f \otimes \omega)^{[\emptyset,\{p\}]}_{|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = (\psi_S\bar\omega_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))$$

$$w_S(\bar f \otimes \omega)(\bar f \otimes \omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S)^{[\{p\},\emptyset]}_{|\begin{pmatrix} N_SN'_S/N_{\bar\omega,S} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

si et $p \in S$ et

$$(\bar f \otimes \omega)^{[\emptyset,\{p\}]}|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (\psi_S\bar\omega_S^2)(B)(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(A/(N_SN'_S))$$

$$w_S(\bar f \otimes \omega)(\bar f \otimes \omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S)^{[\emptyset,\{p\}]}_{|\begin{pmatrix} N_SN'_S/N_{\bar\omega,S} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

si $p \in \bar S$.

Dans les quatre formules qui précèdent, on peut remplacer, partout où il intervient, le symbole $\{p\}$ par $\frac{\{p\}}{\{p\}\cap\Sigma_f}$.

Remarquons qu'on a, dans $\mathbf{C}(X)$, $Q_{p,f,\omega}(X) = X^{-v_p(N'/m_\chi)}P_p(X)$. On a

$$\prod_{p\in S(N')} P_p((\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}) \prod_{p\in\bar S(N')} P_p((\psi_S\bar\omega_S^2)(p)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) =$$

$$(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(N'_S/m_{\omega,S})(\psi_S\bar\omega_S^2)(N'_{\bar S}/m_{\omega,\bar S})\begin{pmatrix} N'_{\bar S}/m_{\omega,S} & 0 \\ 0 & N'_S/m_{\omega,\bar S} \end{pmatrix}$$

$$\prod_{p\in S(N')} Q_{p,f,\omega}((\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}) \prod_{p\in\bar S(N')} Q_{p,f,\omega}((\psi_S\bar\omega_S^2)(p)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Revenons à la formule 6. On a

$$(\bar f \otimes \omega)^{[\Sigma_{N'},\frac{\Sigma_{N'}-\Sigma_{m_\omega}}{(\Sigma_{N'}-\Sigma_{m_\omega})\cap\Sigma_f}]}_{|\prod_p P_p(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} NN'_S & 0 \\ 0 & N_S \end{pmatrix}^{-1}} =$$

$$(\psi_S\bar\omega_S^2)(\frac{N'_{\bar S}B}{m_{\omega,\bar S}})(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(\frac{A}{N_Sm_{\omega,S}})$$

$$w_S(\bar f\otimes\omega)(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S)^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f},\frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}{}_{|\begin{pmatrix}\frac{N'_{\bar S}}{N_{\bar\omega,S}N_{\bar S}m_{\omega,\bar S}} & 0\\ 0 & \frac{N'_S}{N_S m_{\omega,S}}\end{pmatrix}(**)}, \tag{7}$$

où

$$** = \prod_{p\in S(N')} Q_{p,f,\omega}((\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix})\prod_{p\in\bar S(N')} Q_{p,f,\omega}((\psi_S\bar\omega_S^2)(p)\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix})$$

Par ailleurs, on a les formules

$$(\psi_S\bar\omega_S^2)(N'_{\bar S}B) = (\psi_S\bar\omega_S^2)(N'_{\bar S}v/N_{\bar S}), (\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(A/N_S) = (\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(uN'_S/N_S)$$

et

$$\omega(n') = \omega(nN'/N) = \omega_S(nN'/N)\omega_{\bar S}(nN'/N) = \omega_S(-uvN'/N)\omega_{\bar S}(uvN'/N)$$

et donc

$$\omega(n') = \omega_S(-1)\omega(uN'_S/N_S)\omega(vN'_{\bar S}/N_{\bar S}).$$

On a donc la simplification

$$\omega(n')(\psi_S\bar\omega_S^2)(N'_{\bar S}B)(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(\frac{A}{N_S}) = \omega_S(-1)\psi_S\bar\omega_S\omega_{\bar S}(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}\omega_S(\frac{N'_S u}{N_S}).$$

De plus on a

$$Q_{p,f,\omega}((\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}^2)(p)\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}) = Q_{p,f,\bar\omega_{\bar S}\omega_S\psi_{\bar S}}(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix})$$

si $p\in S$ et

$$Q_{p,f,\omega}((\psi_S\bar\omega_S^2)(p)\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}) = Q_{p,f,\omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S}(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix})$$

si $p\in\bar S$.

En combinant avec la formule 7, on obtient

$$f_{|g} = \frac{w(f)}{\phi(N')}\sum_\omega(\bar\psi_{\bar S}\omega_{\bar S}^2)(m_{\omega,S})(\bar\psi_S\omega_S^2)(m_{\omega,\bar S})(\psi_S\bar\omega_S\omega_{\bar S})(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})(\psi_{\bar S}\bar\omega_{\bar S}\omega_S)(\frac{N'_S u}{N_S})$$

$$\tau(\bar\omega)\omega_S(-1)w_S(\bar f\otimes\omega)(\bar f\otimes\omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S)^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f},\frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}{}_{|\begin{pmatrix}\frac{N'_{\bar S}}{N_{\bar\omega,S}N_{\bar S}m_{\omega,\bar S}} & 0\\ 0 & \frac{N'_S}{N_S m_{\omega,S}}\end{pmatrix}(**)}, \tag{8}$$

où ω parcourt les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur divisant N' et où

$$** = \prod_{p\in S(N')} Q_{p,f,\bar\omega_{\bar S}\omega_S\psi_{\bar S}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \prod_{p\in \bar S(N')} Q_{p,f,\omega_{\bar S}\bar\omega_S\psi_S} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Simplifions encore cette formule. On a la relation entre sommes de Gauss

$$\tau(\bar\omega) = \bar\omega_S(m_{\bar\omega,\bar S})\bar\omega_{\bar S}(m_{\bar\omega,S})\tau(\bar\omega_S)\tau(\bar\omega_{\bar S}).$$

Cela donne

$$\tau(\bar\omega)(\bar\psi_{\bar S}\omega_{\bar S}^2)(m_{\omega,S})(\bar\psi_S\omega_S^2)(m_{\omega,\bar S}) = \tau(\bar\omega_S)\tau(\bar\omega_{\bar S})(\bar\psi_{\bar S}\omega_{\bar S})(m_{\omega,S})(\bar\psi_S\omega_S)(m_{\omega,\bar S}).$$

Récrivons 8 en notant χ le caractère de Dirichlet primitif associé à $\omega_{\bar S}\bar\omega_S\bar\psi_{\bar S}$. On a donc $\chi_S = \bar\omega_S$ et $\chi_{\bar S} = \omega_{\bar S}\bar\psi_{\bar S}$, $S(m_\omega) = S(m_\chi)$, $\bar S(m_\omega) = \bar S(m_{\psi\chi})$, $N_{\bar\omega,S} = N_{\chi,S}$ et $\omega_S(-1) = \chi_S(-1)$.

On obtient

$$f_{|g} = \frac{w(f)}{\phi(N')} \sum_\chi \tau'(\chi_S)\tau'(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi_{\bar S})\chi_S(-1)\chi_{\bar S})\chi_{\bar S}(m_{\chi,S})(\bar\psi_S\bar\chi_S)(m_{\psi\chi,\bar S})$$

$$(\bar\psi\bar\chi)(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})\chi(\frac{N'_S u}{N_S})w_S(f\otimes\bar\psi_S\bar\chi_S\chi_{\bar S})(f\otimes\chi)^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f},\frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}{}_{|\begin{pmatrix} \frac{N'_{\bar S}}{N_{\chi,S}N_{\bar S}m_{\psi\chi,\bar S}} & 0 \\ 0 & \frac{N'_S}{N_S m_{\bar\chi,S}} \end{pmatrix}(**)}, \tag{9}$$

où χ parcourt les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur divisant N' et où

$$** = \prod_{p\in S(N')} Q_{p,f,\bar\chi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \prod_{p\in\bar S(N')} Q_{p,f,\chi\psi} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la relation 1 pour $F = f\otimes\chi$ (et donc $\psi' = \psi\chi^2$). On obtient

$$w_S(f\otimes\chi)w_S(f\otimes\bar\psi_S\bar\chi_S\chi_{\bar S}) = \psi_S(-1)(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi_{\bar S}^2)(N_{\chi,S}).$$

Cela permet de substituer $w_S(f\otimes\bar\psi_S\bar\chi_S\chi_{\bar S})$ dans 9 pour obtenir la proposition 6.

3.2 Réciproque du corollaire 2 et observations algorithmiques sur les aspects locaux

Le lecteur vérifiera sans peine que les termes qui apparaissent dans la formule du théorème 1 se déduisent des invariants dont la liste est donnée dans le corollaire 2.

Nous nous proposons dans cette section d'étudier la réciproque : comment la fonction ξ_f permet de retrouver les données (i), (ii), (iii), (iv) et (v). La procédure à suivre pour cette étude nous paraît plus agréable lorsque ξ_f est primitive par torsion.

a. Les invariants de f en termes de la fonction ξ_f

On obtient le caractère de nebentypus ψ de f grâce à la formule $\xi_f(\lambda u, \lambda v) = \bar{\psi}(\lambda)\xi_f(u,v)$ ($u, v \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, $\lambda \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$. On peut déterminer $a_p\xi_f$ (et donc $L_p(f, p^{-s})$) et $\xi W_S f$ lorsque p est un nombre premier et S un sous-ensemble de Σ_N grâce aux formules données dans [15], théorèmes 2 et 5.

b. Torsion de f par des caractères ω tels que $N = N_\omega$

Supposons f primitive par torsion.

Proposition 7. *Soit ω un caractère de Dirichlet primitif tel que $N = N_\omega$ et tel que pour tout nombre premier p divisant m_ω on a $a_p(f) = 0$. Soit $(u,v) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ d'ordre N. Choisissons un sous-groupe cyclique C d'ordre m_ω de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ tel que $C \cap \mathbf{Z}(u,v) = \{0\}$. On a alors*

$$w(f)w(\bar{f}\otimes\bar{\omega})\xi_{f\otimes\omega}(u,v) = \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{(x,y)\in(u,v)+C} \omega((yu-xv)m/N)\xi_f(x,y).$$

Démonstration.- Puisque f est primitive par torsion, et que $a_p(f) = 0$ pour tout nombre premier p divisant m_ω, on a $f\otimes\bar{\omega} = f_{\bar{\omega}}$. Appliquons la section 2.3,

$$f\otimes\bar{\omega} = f_{\bar{\omega}} = \frac{1}{\tau(\omega)} S_{\bar{\omega}} f = \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{t=0}^{m-1} \omega(t) f_{|(\begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}.$$

On a donc, puisque $N_\omega = N$,

$$\begin{aligned} w(f)w(\bar{f}\otimes\bar{\omega}) f\otimes\omega &= \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{t=0}^{m-1} \omega(t) f_{|(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix})} \\ &= \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{t=0}^{m-1} \omega(t) f_{|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tN/m & 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ telle que $(c,d) \in (u,v)$. On a

$$w(f)w(\bar{f}\otimes\bar{\omega}) f\otimes\omega_{|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{t=0}^{m-1} \omega(t) f_{|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tN/m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Cela se traduit par la formule :

$$w(f)w(\bar{f}\otimes\bar{\omega})\xi_{f\otimes\omega}(u,v) = \frac{1}{\tau(\omega)} \sum_{t=0}^{m-1} \omega(t)\xi_f(c - atN/m, d - btN/m).$$

Posons $(x,y) = (c - atN/m, d - btN/m)$ dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$. On a alors la relation $xv - yu = -tN/m$. Lorsque t décrit les entiers de 0 à $m-1$, $(atN/m, btN/m)$ décrit bien un sous-groupe C comme indiqué dans l'énoncé de la proposition.

c. Les invariants locaux des tordues de f par des caractères χ tels que $N_\omega = N$

Soit ω un caractère de Dirichlet tel que $N_\omega = N$ et tel que pour tout nombre premier p divisant m_ω on a $a_p(f) = 0$. Supposons f primitive par torsion. L'étape **b.** permet de connaître la fonction $\xi_{f\otimes\omega}$ à multiplication par un scalaire près. Cela permet de déterminer le facteur $L_p(f\otimes\chi, p^{-s})$ et $w_S(f\otimes\chi)$ pour $p \in \Sigma_N$ et $S \subset \Sigma_N$ grâce encore à [15], théorèmes 2 et 5.

d. Les invariants locaux des tordues de $f\otimes\chi$ pour χ caractère quelconque

Supposons encore f primitive par torsion. Les invariants locaux de $f\otimes\chi$, pour χ caractère quelconque, se déduisent des invariants locaux de $f\otimes\omega$ pour ω parcourant les caractères tels que $N_\omega = N$, d'après la conclusion 2.9 des sections 2.6, 2.7 et 2.8.

e. Les nombres $\Lambda(f\otimes\chi, 1)$ pour χ caractère de niveau divisant N

Supposons encore f primitive par torsion. Après l'étape **d**, tous les termes qui interviennent dans la formule du théorème 1 sont déterminés, excepté les valeurs $\Lambda(f\otimes\chi, 1)$ pour χ caractère de niveau divisant N. Ces derniers nombres sont eux aussi déterminés par le théorème 1, il suffit de s'assurer qu'ils interviennent au moins une fois précédés d'un coefficient non nul. C'est bien le cas, si on choisit u et v tels que $N' = m_\chi$.

f. Que faire lorsque f n'est pas primitive par torsion ?

Indiquons succinctement comment on peut ramener le cas général (*i.e.* f n'est pas primitive par torsion) au cas où f est primitive par torsion. Pour cela il faut déterminer quel caractère χ_0 est tel que N_{χ_0} soit minimal, puis déterminer N_{χ_0} et la fonction $\xi_{f\otimes\chi_0} : (\mathbf{Z}/N_{\chi_0}\mathbf{Z})^2 \to \mathbf{C}$. Pour cela on peut considérer tous les caractères χ de niveau divisant N et les formes modulaires f_χ qui sont propres pour presque tous les opérateurs de Hecke d'indice premiers. On peut déterminer les symboles de Manin associés à f_χ.

Le problème revient, alors à la question suivante. Soit F une forme modulaire propre pour presque tout opérateur de Hecke d'indice premier de forme primitive associée F_0. Étant donné ξ_F, comment trouver F_0 ? C'est possible si on connaît l'action des morphismes de dégénérescence sur les symboles de Manin. Les formules dans ce sens sont données dans [15], proposition 15, 16 et 17. Cette manipulation est moins agréable que celles que nous avons faites lorsque f est primitive par torsion.

3.3 Équations fonctionnelles et relations de Manin

Dans [10], Manin décrit deux familles d'équations fonctionnelles satisfaites par ξ_f (dites *relations de Manin*) :

$$\xi_f(u,v) + \xi_f(-v,u) = 0 \tag{10}$$

et

$$\xi_f(u,v) + \xi_f(v,-u-v) + \xi(-u-v,u) = 0 \tag{11}$$

($(u,v) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$). Observons comment se traduit la relation 10 en utilisant la formule du théorème 1. Pour cela remarquons que le théorème 1 a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\xi_f(u,v) = \sum_{\chi} & c_{\chi,S} c_{\bar\psi\bar\chi,\bar S} \chi_S(-1)(\bar\psi_{\bar S}\bar\chi^2_{\bar S})(N_{\chi,S})\overline{w_S(f\otimes\chi)} \\ & \Lambda^{[\frac{\Sigma_{N'}-S(m_\chi)}{(S(N')-S(m_\chi))\cap\Sigma_f}, \frac{\Sigma_{N'}-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi})}{(\bar S(N')-\bar S(m_{\bar\psi\bar\chi}))\cap\Sigma_f}]}(f\otimes\chi,1)(\bar\psi\bar\chi)(\frac{N'_{\bar S}v}{N_{\bar S}})\chi(\frac{N'_S u}{N_S}),\end{aligned}$$

où χ parcourt les caractères de Dirichlet primitifs tels que $m_{\chi,S} m_{\psi\chi,\bar S} | N'$ et où $c_{\chi,S}$ et $c_{\bar\psi\bar\chi,\bar S}$ dépendent de f, χ, N' et S mais pas de (u,v) et sont échangés par $(\chi,S) \mapsto (\bar\chi\bar\psi,\bar S)$.

On peut appliquer le théorème 1 à $\xi(u,v)$ et $\xi(-v,u)$. L'identité 10 se traduit alors par une identification des χ-èmes termes pour chaque caractère χ. Après échanges simultanés de u et $-v$, de S et $\bar S$ et des termes correspondant à χ et $\bar\psi\bar\chi$ on retrouve alors l'équation fonctionnelle de la fonction $s \mapsto \Lambda(f\otimes\chi,s)$ en $s=1$. Après vérification de la non nullité de suffisamment de coefficients (comme dans la section 3.2 étape **e**), on peut même établir qu'il y a équivalence entre la relation 10 et la totalité des équations fonctionnelle des $\Lambda(f\otimes\chi,s)$ en $s=1$ pour χ parcourant les caractères de Dirichlet de conducteurs divisant N.

On peut se demander, en ayant à l'esprit les théorèmes inverses, comment interpréter la relation 11 en termes de fonctions L. Nous n'avons de réponse satisfaisante à cette question. Nous pouvons tout juste rappeler que les relations 10 et 11 sont équivalentes à 10 et

$$\xi_f(u,v) - \xi_f(v,u+v) - \xi(u+v,v) = 0 \tag{12}$$

($(u,v) \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$). La famille de relations 12 a été mise en évidence par Lewis [7].

4 Produit de formes modulaires

4.1 Le produit scalaire de Petersson

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soient f_1 et f_2 deux formes modulaires paraboliques de poids 2 pour Γ. Rappelons que le produit scalaire de Petersson de f_1 et f_2 est donné par la formule :

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma]} \int_{D_\Gamma} f_1(z)\overline{f}_2(z) dx\, dy,$$

où D_Γ est un domaine fondamental pour Γ dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. Posons $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons de plus $\rho = e^{2i\pi/3} \in \mathcal{H}$. Soit R un système de représentants de $\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Théorème 8. *On a*

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma]} \sum_{g \in R} \int_{g0}^{g\infty} f_1(z)\, dz \int_{gi}^{g\rho} \overline{f_2(z)\, dz},$$

et

$$< f_1, f_2 >=$$
$$\frac{-i}{12[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma]} \sum_{g \in R} \int_{g\tau 0}^{g\tau\infty} f_1(z)\, dz \int_{g0}^{g\infty} \overline{f_2(z)\, dz} - \int_{g0}^{g\infty} f_1(z)\, dz \int_{g\tau 0}^{g\tau\infty} \overline{f_2(z)\, dz}.$$

Démonstration.- Posons $\omega_1 = f_1(z)\, dz$ et $\omega_2 = f_2(z)\, dz$. Pour g dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, posons $\omega_{j|g} = f_{j|g}\, dz$ ($j \in \{1, 2\}$). Considérons le domaine fondamental D_0 pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ constitué par le triangle hyperbolique de sommets ∞, 0 et ρ. On a

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma]} \int_{D_\Gamma} \omega_1 \wedge \overline{\omega_2} = \frac{1}{2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma]} \sum_{g \in R} \int_{D_0} \omega_{1|g} \wedge \overline{\omega_{2|g}}.$$

Posons $F_g(z) = \int_\rho^z \overline{f_{2|g}(u)\, du}$. On a $df_{1|g}F_g(z)\, dz = \omega_1 \wedge \overline{\omega_2}$. Cela donne, par la formule de Stokes,

$$\begin{aligned} 2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma] < f_1, f_2 > &= \sum_{g \in R} \int_{\partial D_0} f_{1|g} F_g(z)\, dz \\ &= \sum_{g \in R} \int_\infty^0 f_{1|g} F_g(z)\, dz + \int_0^\rho f_{1|g} F_g(z) + \int_0^\rho f_{1|g} F_g(z). \end{aligned}$$

Utilisons que σ est d'ordre 2 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ et qu'on a $\tau\rho = \rho$ et $\tau\infty = 0$. Cela donne

$$2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma] < f_1, f_2 >=$$
$$\frac{1}{2} \sum_{g \in R} \int_\infty^0 f_{1|g} F_g(z)\, dz + \int_\infty^0 f_{1|g\sigma} F_{g\sigma}(z)\, dz + \sum_{g \in R} \int_\infty^\rho f_{1|g} F_g(z)\, dz + \int_\rho^\infty f_{1|g\tau} F_{g\tau}(z)\, dz.$$

Utilisons la relation $F_{gh}(hz) = \int_{h^{-1}\rho}^z \overline{f_{2|g}(u)\, du}$. On obtient

$$2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma] < f_1, f_2 >= \frac{1}{2} \sum_{g \in R} \int_\infty^0 \omega_{1|g} \int_{\sigma\rho}^\rho \overline{\omega_{2|g}} + \int_\rho^\infty \omega_{1|g\tau} \int_{\tau^2\rho}^\rho \overline{\omega_{2|g}}.$$

Le dernier terme est nul. Décomposons le deuxième facteur du premier terme. On a

$$2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}):\Gamma] < f_1, f_2 >= \frac{1}{2}\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}(\int_{\sigma\rho}^{\sigma i}\overline{\omega_{2|g}}+\int_{\sigma i}^{\rho}\overline{\omega_{2|g}}).$$

Comme $\sigma i = i$, et comme $\int_0^\infty \omega_{1|g}(\int_{\sigma\rho}^{\sigma i}\overline{\omega_{2|g}}) = \int_0^\infty \omega_{1|g\sigma}(\int_i^\rho \overline{\omega_{2|g\sigma}})$, on a la première formule du théorème.

Démontrons maintenant la deuxième formule. On a

$$2i[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}):\Gamma] < f_1, f_2 >= \sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\infty \overline{\omega_{2|g}} - \int_0^\infty \omega_{1|g}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}}.$$

Calculons séparément les deux séries de termes. On a

$$\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\infty \overline{\omega_{2|g}} = \frac{1}{2}\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\infty \overline{\omega_{2|g}} + \int_0^\infty \omega_{1|g\sigma}\int_i^\infty \overline{\omega_{2|g\sigma}},$$

et comme $\sigma\infty = 0$,

$$\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\infty \overline{\omega_{2|g}} = \frac{1}{2}\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_0^\infty \overline{\omega_{2|g}}.$$

Par ailleurs, on a

$$\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}} + \int_0^\infty \omega_{1|g\tau}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau}} + \int_0^\infty \omega_{1|g\tau^2}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau^2}}.$$

Remarquons qu'on a $\int_0^\infty \omega_{1|g} + \int_0^\infty \omega_{1|g\tau} + \int_0^\infty \omega_{1|g\tau^2} = 0$. C'est pourquoi on a

$$\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{g\in R}\int_0^\infty \omega_{1|g\tau}(\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau}} - \int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}}) + \int_0^\infty \omega_{1|g\tau^2}(\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau^2}} - \int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}}).$$

Comme $(\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau}} - \int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}}) = -\int_0^\infty \overline{\omega_{2|g}}$ et comme $\int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g\tau^2}} - \int_\rho^\infty \overline{\omega_{2|g}} = \int_0^\infty \overline{\omega_{2|g\tau^2}}$, on obtient, en posant $\lambda_j(g) = \int_0^\infty \omega_j$ $(j \in \{1,2\})$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\rho \overline{\omega_{2|g}} &= \frac{1}{2}\sum_{g\in R}\lambda_1(g)\overline{\lambda_2(g)} + \frac{1}{3}\sum_{g\in R}\lambda_1(g\tau)\overline{\lambda_2(g)} - \frac{1}{3}\sum_{g\in R}\lambda_1(g\tau)\overline{\lambda_2(g)}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{g\in R}\lambda_1(g)\overline{\lambda_2(g)} + \frac{1}{3}\sum_{g\in R}\lambda_1(g\tau)\overline{\lambda_2(g)}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $\lambda_1(g)+\lambda_1(g\tau)+\lambda_1(g\tau^2)=0$, on obtient finalement

$$\int_0^\infty \omega_{1|g}\int_i^\rho \overline{\omega_{2|g}} = \frac{1}{6}\sum_{g\in R}\lambda_1(g\tau)\overline{\lambda_2(g)} - \frac{1}{6}\sum_{g\in R}\lambda_1(g\tau)\overline{\lambda_2(g\tau^2)}.$$

Cela achève la démonstration.

Corollaire 9. *Supposons qu'on ait $\Gamma=\Gamma_1(N)$, on a*

$$< f_1, f_2 >=$$

$$\frac{i}{12[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}):\Gamma_1(N)]}\sum_{(u,v)\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2}\xi_{f_1}(v,-u-v)\overline{\xi_{f_2}(u,v)}-\xi_{f_1}(u,v)\overline{\xi_{f_2}(v,-u-v)}.$$

Démonstration.- C'est une application directe de la deuxième formule du théorème 8, en tenant compte de la formule ($j\in\{1,2\}$)

$$\xi_{f_j}(u,v) = -i\int_{g0}^{g\infty} f_j(z)\,dz,$$

où $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ vérifie $(c,d)\in(u,v)$.

4.2 La fonction L du carré tensoriel

Supposons la forme modulaire f de caractère de nebentypus trivial et de niveau N premier. Considérons la série de Dirichlet

$$L(f\otimes f,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^s}.$$

Elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe, avec un pôle simple en $s=2$ et on a [16] (notre normalisation pour le produit scalaire de Petersson est en rapport $\pi/3=\mathrm{vol}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{H})$ avec celle de [16])

$$\mathrm{Res}_{s=2}L(f\otimes f,s) = 12\pi < f,f > .$$

Théorème 10. *On a*

$$\mathrm{Res}_{s=2}L(f\otimes f,s) = \frac{2\pi i}{(N+1)(N-1)^2}\sum_{\chi,\chi',\chi\chi'(-1)=-1}\frac{\Lambda(f\otimes\chi',1)\Lambda(f\otimes\chi,1)}{\tau(\chi\chi')},$$

où χ et χ' parcourent les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur N tels que $\chi\chi'$ soit impair.

Démonstration.- Partons de la formule donnée dans le corollaire 9. On a, puisque N est premier, $[\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : \Gamma_1(N)] = (N^2-1)$ et donc

$$< f, f >= \frac{i}{12(N^2-1)} \sum_{(u,v)\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2} \xi_f(v,-u-v)\overline{\xi_f(u,v)} - \xi_f(u,v)\overline{\xi_f(v,-u-v)}.$$

Venons-en à la fonction ξ_f. Puisque le nebentypus de f est trivial, la fonction ξ_f est homogène. C'est pourquoi on pose, pour $u/v \in \mathbf{P}_1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \cup \{\infty\}$,

$$\xi_f(u/v) = \xi_f(u,v).$$

Cela permet d'écrire

$$< f, f >= \frac{i}{12(N+1)} \sum_{x\in\mathbf{P}_1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} \xi_f(-\frac{1}{x+1})\overline{\xi_f(x)} - \xi_f(x)\overline{\xi_f(-\frac{1}{x+1})}.$$

Utilisons la relation de Manin $\xi_f(x) + \xi_f(-1/x) = 0$ ($x \in \mathbf{P}_1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$). On obtient

$$< f, f >= \frac{i}{12(N+1)} \sum_{x\in\mathbf{P}_1(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})} \xi_f(x)\overline{\xi_f(x+1)} - \xi_f(x+1)\overline{\xi_f(x)}.$$

Le terme correspondant à $x = \infty$ est nul dans la somme qui précède. Par application des relations de Manin, on a les relations $\xi_f(1/0) + \xi_f(0/1) = 0$ et $\xi_f(1/0) + \xi_f(0/1) + \xi_f(-1/1) = 0$. On en déduit $\xi_f(-1) = 0$ et $\xi_f(1) = 0$. C'est pourquoi on a également la nullité des termes correspondant à $x = 0$ et $x = -1$. On a donc, si on ne conserve que les termes correspondant à $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $x \neq \infty$ et si on change de plus x en $-x$,

$$< f, f >= \frac{i}{12(N+1)} \sum_{x\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*-\{1\}} \xi_f(-x)\overline{\xi_f(1-x)} - \xi_f(1-x)\overline{\xi_f(-x)}.$$

Comme N est premier, rendons plus explicite le théorème 1. On a, pour $x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$, $N' = N$ et on peut choisir $S = \emptyset$ et $\bar{S} = \{N\}$. Le terme associé au caractère χ dans la formule du théorème 1 est nul lorsque $\chi = 1$, car N est spécial pour f et on a que $\Lambda^{[\frac{\{N\}}{\emptyset},\frac{\{N\}}{\{N\}}]}(f,1)$ est multiple de $(1-a_N)\Lambda(f,1)$ qui est nul (en effet $a_N = -w(f)$ et $\Lambda(f,1) = 0$ si $w(f) \neq -1$). Lorsque χ est non trivial, le terme associé à χ se simplifie car on a $\chi_S = 1$, $Q_{p,f,\chi} = 1$, $N_\chi = N^2$, $L_p(f \otimes \chi, X) = 1$. On obtient, pour $x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}^*$,

$$\xi_f(x) = \frac{w(f)}{N-1} \sum_{\chi\neq 1} \frac{\tau(\bar{\chi})}{N} \chi(x) \Lambda(f\otimes\chi, 1)$$

où la somme porte sur les caractères de Dirichlet primitifs de conducteur N.

Comme f est de nebentypus trivial, on a

$$\overline{\Lambda(f \otimes \chi, 1)} = \Lambda(f \otimes \bar{\chi}, 1).$$

On en déduit, en utilisant que $|w(f)| = 1$,

$$< f, f >=$$

$$\frac{i}{12(N+1)(N-1)^2 N^2} \sum_{x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* - \{1\}} \sum_{\chi, \chi'} \tau(\bar{\chi}) \overline{\tau(\bar{\chi}')} \Lambda(f \otimes \chi, 1) \Lambda(f \otimes \bar{\chi}', 1)) F(\chi, \chi'),$$

où

$$F(\chi, \chi') = \sum_{x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* - \{1\}} (\chi(-x)\bar{\chi}'(1-x) - \chi(1-x)\bar{\chi}'(-x)).$$

Changeons χ' en $\bar{\chi}'$ dans la somme. On obtient, en tenant compte de l'égalité $\overline{\tau(\chi')} = \chi'(-1)\tau(\bar{\chi}')$,

$$< f, f >=$$

$$\frac{i}{12(N+1)(N-1)^2 N^2} \sum_{\chi, \chi'} \tau(\bar{\chi}) \tau(\bar{\chi}') \chi'(-1) \Lambda(f \otimes \chi', 1) \Lambda(f \otimes \chi, 1) F(\chi, \bar{\chi}')$$

Cette somme est antissymétrique (resp. symétrique) en χ et χ' lorsque $\chi'(-1) = \chi(-1)$ (resp. $\chi'(-1) = -\chi(-1)$). C'est pourquoi on a

$$< f, f >=$$

$$\frac{i}{6(N+1)(N-1)^2 N^2} \sum_{\chi, \chi', \chi\chi'(-1) = -1} \tau(\bar{\chi}) \tau(\bar{\chi}') \chi'(-1) \Lambda(f \otimes \chi', 1)) \Lambda(f \otimes \chi, 1)) E(\chi, \chi').$$

où $E(\chi, \chi') = \sum_{x \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* - \{1\}} \chi(-x)\chi'(1-x)$. On reconnaît dans cette dernière expression une somme de Jacobi donnée par la formule

$$E(\chi, \chi') = \chi(-1) \frac{\tau(\chi)\tau(\chi')}{\tau(\chi\chi')}.$$

On obtient donc, en tenant compte de l'imparité de $\chi\chi'$,

$$< f, f >=$$

$$\frac{i}{6(N+1)(N-1)^2 N^2} \sum_{\chi, \chi', \chi\chi'(-1) = -1} \frac{\tau(\chi)\tau(\chi')\tau(\bar{\chi})\tau(\bar{\chi}')}{\tau(\chi\chi')} \Lambda(f \otimes \chi', 1) \Lambda(f \otimes \chi, 1)$$

Utilisons les identités $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1)N = -\chi'(-1)N = -\tau(\chi')\tau(\bar{\chi}')$. On obtient

$$< f, f >= \frac{i}{6(N+1)(N-1)^2} \sum_{\chi, \chi', \chi\chi'(-1) = -1} \frac{\Lambda(f \otimes \chi', 1) \Lambda(f \otimes \chi, 1)}{\tau(\chi\chi')}.$$

Cela donne la formule annoncée lorsque l'on combine avec l'identité rappelée avant l'énoncé du théorème 10

Références

1. Atkin A.O.L., Lehner J. Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. *Math. Ann.*, 185 :134–160, 1970.
2. Atkin A.O.L., Li W. C. W. Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators. *Invent. Math.*, 48(3) :221–243, 1978.
3. Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor, R. On the modularity of elliptic curves over $\mathbf{Q}$: wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2) :489–549, 2000.
4. Brunault F. *Sur la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique.* Thèse. Université Denis Diderot, 2005.
5. Cremona J. *Computations of modular elliptic curves and the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture.* Cambridge University Press, 1992.
6. Kato K. p-adic hodge theory and values of zeta functions of modular forms. In *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III*, number 295 in Astérísque, pages 117–290. Société Mathématiques de France, 2004.
7. Lewis J. Spaces of holomorphic functions equivalent to the even Maass cusp forms. *Invent. Math.*, 127(2) :271–306, 1997.
8. Li W. C. W. On converse theorems for GL(2) and GL(1). *Amer. J. of Math.*, 103(5) :851–885, 1981.
9. Luo W., Ramakrishnan D. Determination of modular forms by twists of critical L-values. *Invent. Math.*, 130(2) :371–398, 1997.
10. Manin Y. Parabolic points and zeta-functions of modular curves. *Math. USSR Izvestija*, 6(1) :19–64, 1972.
11. Manin Y. Explicit formulas for the eigenvalues of Hecke operators. *Acta arithmetica*, XXIV :239–249, 1973.
12. Manin Y. Mathematics as metaphor. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Kyoto, 1990)*, volume II, pages 1665–1671. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
13. Martin F. *Périodes des formes modulaires de poids* 1. Thèse. Université Denis Diderot, 2001.
14. Merel L. Opérateurs de Hecke pour $\Gamma_0(N)$ et fractions continues. *Ann. Inst. Fourier*, 41(3), 1991.
15. Merel L. Universal fourier expansions of modular forms. In Gerhard Frey, editor, *On Artin's conjecture for 2-dimensional, odd Galois representations*, number 1585 in Lecture Notes in Mathematics, pages 59–94. Springer Verlag, 1994.
16. Shimura G. The special values of the zeta functions associated with cusp forms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(6) :783–804, 1976.
17. Weil A. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, 168 :149–156, 1967.