UNE INTERSECTION DE QUADRIQUES LIÉE À LA SUITE DE STURM

Oleg Ogievetsky[1] et Vadim Schechtman[2]

[1] Centre de Physique Théorique, Luminy, 13288 Marseille, France (Unité Mixte de Recherche 6207 du CNRS et des Universités Aix–Marseille I, Aix–Marseille II et du Sud Toulon – Var; laboratoire affilié à la FRUMAM, FR 2291) et Institut de Physique P.N. Lebedev, Département Théorique, Leninsky prospekt 53, 119991 Moscou, Russie; `oleg@cpt.univ-mrs.fr`
[2] Laboratoire Emile Picard, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse, France; `schechtman@math.ups-tlse.fr`

A Yuri Ivanovich Manin, à l'occasion de son 70-ème anniversaire

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

FORMULES

§ 1. Introduction

1.1. Cet article est une variation sur un thème de [Jacobi].

Soit
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$
un polynôme de degré $n > 0$ à coefficients dans un corps de base $\mathfrak{k}$ de caractéristique 0. Rappelons que *la suite de Sturm* de f,
$$\mathfrak{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots)\ ,$$
est définie par récurrence : on pose $f_0(x) = f(x),\ f_1(x) = f'(x)$ et pour $j \geq 1$ f_{j+1} est le reste de la division euclidienne de f_{j-1} par f_j, avec le signe opposé :
$$f_{j-1}(x) = q_{j-1}(x)f_j(x) - f_{j+1}(x), \tag{1.1.1}$$
$\deg f_{j+1}(x) < \deg f_j(x)$, cf. le célèbre mémoire [Sturm].

Dans cette note on propose des formules explicites pour les coefficients des polynômes f_j en termes des coefficients de f. Plus généralement, on donnera des formules analogues pour les membres de l'algorithme d'Euclide correspondant à deux polynômes quelconques f_1, f_2 de degrés $n-1, n-2$.

Notre point de départ est une algèbre $\mathfrak{B}$, quotient de l'anneau de polynômes en variables $b(i)_j$ $(i \geq 1,\ j \geq 2i)$ par certains rélations quadratiques, cf. (1.7.1) ci-dessous. Nos formules sont des conséquences des identités dans $\mathfrak{B}$, analogues des rélations de Plücker.

1.2. Pour énoncer le résultat, introduisons les quantités quadratiques
$$b(j)_i = n\sum_{p=0}^{j-1}(i-2p)a_{n-p}a_{n-i+p} - j(n-i+j)a_{n-j}a_{n+j-i},$$
$j \geq 1,\ i \geq 2j$. Ici on pose $a_i = 0$ pour $i < 0$. Par exemple,
$$b(1)_i = nia_na_{n-i} - (n-i+1)a_{n-1}a_{n-i+1}\ .$$

1.3. Ensuite on introduit, pour $m \geq 2$, les matrices $(m-1) \times (m-1)$ symétriques

$$C(m) = \begin{pmatrix} b(1)_2 & b(1)_3 & b(1)_4 & b(1)_5 & \ldots & b(1)_m \\ b(1)_3 & b(2)_4 & b(2)_5 & b(2)_6 & \ldots & b(2)_{m+1} \\ b(1)_4 & b(2)_5 & b(3)_6 & b(3)_7 & \ldots & b(3)_{m+2} \\ b(1)_5 & b(2)_6 & b(3)_7 & b(4)_8 & \ldots & b(4)_{m+3} \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ b(1)_m & b(2)_{m+1} & b(3)_{m+2} & b(4)_{m+3} & \ldots & b(m-1)_{2m-2} \end{pmatrix} .$$

De plus, pour $i \geq 0$ on définit une matrice "décalée" $C(m)_i$: elle est obtenue en remplaçant dans $C(m)$ la dernière ligne par

$$\begin{pmatrix} b(1)_{m+i} & b(2)_{m+i+1} & b(3)_{m+i+2} & b(4)_{m+i+3} & \ldots & b(m-1)_{2m+i-2} \end{pmatrix} .$$

Donc $C(m)_0 = C(m)$. On pose

$$c(m)_i := \det C(m)_i, \ c(m) := c(m)_0 \ .$$

En particulier,

$$c(2)_i = b(1)_{i+2}$$

Il est commode de poser

$$c(1)_i := \frac{(n-i)a_{n-i}}{na_n},$$

$i \geq 0$, $c(1) := c(1)_0 = 1$.

1.4. Puis on définit les nombres $\gamma_j, \ j \geq 1$ par récurrence :

$$\gamma_1 = na_n, \ \gamma_2 = -\frac{1}{n^2 a_n}, \ \gamma_{j+1} = \gamma_{j-1} \cdot \frac{c(j-1)^2}{c(j)^2},$$

$j \geq 2$. Autrement dit,

$$\gamma_j = (-1)^{j+1} \epsilon_j \cdot \prod_{i=1}^{j-2} c(j-i)^{2(-1)^i} \ ,$$

où $\epsilon_j = na_n$ si j est impair et $1/(n^2 a_n)$ sinon.

Les nombres $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ sont donc bien définis si tous les nombres $c(2), c(3), \ldots, c(j-1)$ sont différents de zéro.

1.5. *Théorème.* Supposons que $\deg f_j = n - j$, donc $\deg f_i = n - i$ pour $i \leq j$.

Alors pour tous $i \leq j$, on a $c(i) \neq 0$ et

$$f_i(x) = \gamma_i \cdot \sum_{p=0}^{n-i} c(i)_p x^{n-i-p} \ .$$

En particulier, le coefficient dominant de $f_i(x)$ est égal à $\gamma_i c(i)$.

1.6. On vérifie aussitôt que

$$b(k)_i - b(k-1)_i = c(1)_{k-1} b(1)_{i-k+1} - c(1)_{i-k} b(1)_k \tag{1.6.1}$$

pour tous $k \geq 2,\ i \geq 2k-2$. Par exemple,

$$b(2)_i - b(1)_i = c(1)_1 b(1)_{i-1} - c(1)_{i-2} b(1)_2,$$

$$b(3)_i - b(2)_i = c(1)_2 b(1)_{i-2} - c(1)_{i-3} b(1)_3,$$

etc. Il s'en suit que tous les $b(j)_i,\ j \geq 2$, sont expressibles en termes de $c(1)_p$ et $c(2)_p = b(1)_{p+2},\ p \geq 0$.

1.7. Les formules (1.6.1) impliquent que les nombres $b(i)_j$ satisfont aux relations quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} &\big(b(k)_i - b(k-1)_i\big) \cdot b(1)_j \\ &= \big(b(j)_{i-k+j} - b(j-1)_{i-k+j}\big) \cdot b(1)_k - \big(b(j)_{k+j-1} - b(j-1)_{k+j-1}\big) \cdot b(1)_{i-k+1} \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

On verra que la preuve de 1.5 ne dépend que des relations (1.7.1).

On formalise la situation en introduisant une algèbre quadratique correspondante, cf. § 2 ci-dessous.

1.8. Maintenant soient

$$f_1(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \dots$$

et

$$f_2(x) = \beta_0 x^{n-2} + \beta_1 x^{n-3} + \dots$$

deux polynômes arbitraires de degrés $n-1, n-2$. On définit $f_j,\ j \geq 3$ à partir de f_1, f_2 par les formules de l'algorithme d'Euclide (1.1.1).

Posons

$$c(1)_i := \frac{\alpha_i}{\alpha_0},\ b(1)_{i+2} := \beta_i,\ i \geq 0\ .$$

Définissons les nombres $b(k)_i,\ k \geq 2$ par récurrence sur k, à partir des formules (1.6.1).

Définissons les nombres $c(m)_i,\ m \geq 2$, par les formules 1.3.

Enfin, on pose :

$$\tilde{\gamma}_1 = \alpha_0\ ,\ \tilde{\gamma}_2 = 1\ ,\ \tilde{\gamma}_{j+1} = \tilde{\gamma}_{j-1} \frac{c(j-1)^2}{c(j)^2}$$

Alors on a

1.9. *Théorème.* Supposons que $\deg f_j = n-j$, d'où $\deg f_i = n-i$ pour $i \leq j$.

Alors pour tous $i \leq j$, on a $c(i) \neq 0$ et

$$f_i(x) = \tilde{\gamma}_i \cdot \sum_{p=0}^{n-i} c(i)_p x^{n-i-p} \ .$$

En particulier, le coefficient dominant de $f_i(x)$ est égal à $\tilde{\gamma}_i c(i)$.

Cf. [Jacobi], section 15.

1.10. Dans la Deuxième Partie on présente un exemple numérique. Là, les déterminants de Cauchy apparaissent dans les asymptotiques des coefficients dominants de la suite de Sturm pour les polynômes d'Euler.

§ 2. Algèbre $\mathfrak{B}$

2.1. On peut réécrire les relations (1.7.1) sous la forme suivante :

$$\det\begin{pmatrix} b(1)_j & b(1)_k \\ b(j-1)_{i+j-k} & b(k-1)_i \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} b(1)_j & b(j-1)_{j+k-1} \\ b(1)_{i-k+1} & b(k)_i \end{pmatrix}$$
$$+ \det\begin{pmatrix} b(1)_k & b(j)_{j+k-1} \\ b(1)_{i-k+1} & b(j)_{i+j-k} \end{pmatrix} = \Delta(k,j)_i - \Delta'(k,j)_i + \Delta''(k,j)_i = 0 \ . \tag{2.1.1}$$

2.2. On définit une algèbre quadratique $\mathfrak{B}$ comme une $\mathfrak{k}$-algèbre commutative engendrée par les lettres $b(i)_j,\ i,j \in \mathbb{Z}$, modulo les relations (2.1.1), où $i,j,k \in \mathbb{Z}$.

(D'ailleurs, dans tout le paragraphe qui suit on peut remplacer le corps de base $\mathfrak{k}$ par un anneau commutatif quelconque.)

2.3. Le but de ce paragraphe est d'écrire certaines relations entre les déterminants $n \times n$ dans $\mathfrak{B}$ qui généralisent (2.1.1).

On fixe un nombre entier $n \geq 2$. Soient $m_1, \ldots, m_n, i$ des entiers.

On définit $2n+2$ vecteurs $v_j, w_j \in \mathfrak{k}^n,\ j = 1, \ldots, n+1$:

$$w_1 = (b(1)_{m_1}, b(1)_{m_2}, \ldots, b(1)_{m_n}) \ ,$$

$$w_{j+1} = (b(1)_{m_1}, \ldots, \hat{b}(1)_{m_{n+1-j}}, \ldots, b(1)_{m_n}, b(1)_{i-m_n+1}),$$

$1 \leq j \leq n$ (suivant l'usage, $\hat{x}$ signifie que l'on omet la composante x).

Puis

$$v_1 = (b(m_1-1)_{i+m_1-m_n}, b(m_2-1)_{i+m_2-m_n}, \ldots, b(m_{n-1}-1)_{i+m_{n-1}-m_n}, b(m_n-1)_i) \ ,$$

$$v_2 = (b(m_1-1)_{m_1+m_n-1}, b(m_2-1)_{m_2+m_n-1}, \ldots, b(m_{n-1}-1)_{m_{n-1}+m_n-1}, b(m_n)_i) \ ,$$

$$v_3 = (b(m_1-1)_{m_1+m_{n-1}-1}, b(m_2-1)_{m_2+m_{n-1}-1}, \ldots, b(m_{n-2}-1)_{m_{n-2}+m_{n-1}-1},$$
$$b(m_{n-1})_{m_{n-1}+m_n-1}, b(m_{n-1})_{i+m_{n-1}-m_n}) \ ,$$

$$v_4 = (b(m_1-1)_{m_1+m_{n-2}-1}, b(m_2-1)_{m_2+m_{n-2}-1}, \ldots, b(m_{n-3}-1)_{m_{n-3}+m_{n-2}-1},$$
$$b(m_{n-2})_{m_{n-2}+m_{n-1}-1}, b(m_{n-2})_{m_{n-2}+m_n-1}, b(m_{n-2})_{i+m_{n-2}-m_n}) \ ,$$

$$\dots$$

$$v_n = (b(m_1{-}1)_{m_1+m_2-1}, b(m_2)_{m_2+m_3-1}, b(m_2)_{m_2+m_4-1}, \dots, b(m_2)_{m_2+m_n-1}, b(m_2)_{i+m_2-m_n})$$

$$v_{n+1} = (b(m_1)_{m_1+m_2-1}, b(m_1)_{m_1+m_3-1}, \dots, b(m_1)_{m_1+m_n-1}, b(m_1)_{i+m_1-m_n})\ .$$

2.4. Soit

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1,n+1} \\ . & \dots & . \\ x_{n-2,1} & \dots & x_{n-2,n+1} \end{pmatrix}$$

une matrice $(n-2)\times(n+1)$ sur $\mathfrak{B}$; soit $M_i,\ i = 1, \dots, n+1$, ses sous-matrices $(n-2)\times n$. Pour écrire M_i, on enlève donc la i-ième colonne de M.

Maintenant on va définir $n+1$ matrices $n \times n$

$$D_j = D_j(m_1, \dots, m_n; M_{n+2-j})_i,$$

$j = 1, \dots, n+1$. On pose :

$$D_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ M_{n+1} \\ v_1 \end{pmatrix}, D_j = \begin{pmatrix} w_j^t \ M_{n+2-j}^t \ v_j^t \end{pmatrix},$$

$j = 2, \dots, n+1$. Ici $(.)^t$ désigne la matrice transposée.

Enfin, on pose

$$\Delta_j = \Delta_j(m_1, \dots, m_n; M_{n+2-j})_i = \det D_j(m_1, \dots, m_n; M_{n+2-j})_i,$$

$j = 1, \dots, n+1$.

Considérons la somme alternée

$$R(n; m_1, \dots, m_n; M)_i = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \Delta_j(m_1, \dots, m_n; M_{n+2-j})_i\ .$$

2.5. *Exemple.* $n = 2$. Dans ce cas il n'y a pas de matrice M ; trois nombres entiers sont donnés : m_1, m_2 et i. On aura 6 vecteurs :

$$w_1 = (b(1)_{m_1}, b(1)_{m_2}),\ w_2 = (b(1)_{m_1}, b(1)_{i-m_2+1}),\ w_3 = (b(1)_{m_2}, b(1)_{i-m_2+1})$$

et

$$v_1 = (b(m_1-1)_{i+m_1-m_2}, b(m_2-1)_i),\ v_2 = (b(m_1-1)_{m_1+m_2-1}, b(m_2)_i),$$

$$v_2 = (b(m_1)_{m_1+m_2-1}, b(m_1)_{i+m_1-m_2})\ .$$

Il s'ensuit :

$$R(2; m_1, m_2)_i = \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_1} & b(1)_{m_2} \\ b(m_1-1)_{i+m_1-m_2} & b(m_2-1)_i \end{pmatrix}$$

$$- \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_1} & b(m_1-1)_{m_1+m_2-1} \\ b(1)_{i-m_2+1} & b(m_2)_i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_2} & b(m_1)_{m_1+m_2-1} \\ b(1)_{i-m_2+1} & b(m_2)_{i+m_1-m_2} \end{pmatrix}$$

On reconnaît là la partie gauche de (2.1.1) pour $(j,k) = (m_1, m_2)$. Il en découle que $R(2; m_1, m_2)_i = 0$.

2.6. *Exemple.* $n = 3$. Dans ce cas la matrice M se réduit à 4 éléments :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \end{pmatrix} .$$

L'expression $R(3; m_1, m_2, m_3; M)_i$ prend la forme

$$R(3; m_1, m_2, m_3; M)_i = \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_1} & b(1)_{m_2} & b(1)_{m_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ b(m_1-1)_{i+m_1-m_3} & b(m_2-1)_{i+m_2-m_3} & b(m_3-1)_i \end{pmatrix}$$

$$- \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_1} & x_1 & b(m_1-1)_{m_1+m_3-1} \\ b(1)_{m_2} & x_2 & b(m_2-1)_{m_2+m_3-1} \\ b(1)_{i-m_3+1} & x_4 & b(m_3)_i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_1} & x_1 & b(m_1-1)_{m_1+m_2-1} \\ b(1)_{m_3} & x_3 & b(m_2)_{m_2+m_3-1} \\ b(1)_{i-m_3+1} & x_4 & b(m_2)_{i+m_2-m_3} \end{pmatrix}$$

$$- \det \begin{pmatrix} b(1)_{m_2} & x_2 & b(m_1)_{m_1+m_2-1} \\ b(1)_{m_3} & x_3 & b(m_1)_{m_1+m_3-1} \\ b(1)_{i-m_3+1} & x_4 & b(m_1)_{i+m_1-m_3} \end{pmatrix} .$$

Calculons cette expression.

On développe le premier déterminant suivant la deuxième ligne et les autres suivant les deuxièmes colonnes :

$$\Delta_1(3; m_1, m_2, m_3; M_4)_i = -x_1 \Delta_1(2; m_2, m_3)_i + x_2 \Delta_1(2; m_1, m_3)_i - x_3 \Delta_1(2; m_1, m_2)_{i+m_2-m_3} ,$$

$$\Delta_2(3; m_1, m_2, m_3; M_3)_i = -x_1 \Delta_2(2; m_2, m_3)_i + x_2 \Delta_2(2; m_1, m_3)_i - x_4 \Delta_1(2; m_1, m_3)_{m_2+m_3-1} .$$

Puis

$$\Delta_3(3; m_1, m_2, m_3; M_2)_i = -x_1 \Delta_3(2; m_2, m_3)_i + x_3 \Delta_2(2; m_1, m_2)_{i+m_2-m_3} - x_4 \Delta_2(2; m_1, m_3)_{m_2+m_3-1}$$

et

$$\Delta_4(3; m_1, m_2, m_3; M_1)_i = -x_2 \Delta_3(2; m_1, m_3)_i + x_3 \Delta_3(2; m_1, m_2)_{i+m_2-m_3} - x_4 \Delta_3(2; m_1, m_3)_{m_2+m_3-1} .$$

Pour abréger les notations on introduit des vecteurs entiers :

$$(i_1, i_2, i_3, i_4) := (i, i, i + m_2 - m_3, m_2 + m_3 - 1) ,$$

$$\mu = (m_1, m_2, m_3) ,$$

$$\mu_1 = (m_2, m_3), \;\; \mu_2 = (m_1, m_3), \;\; \mu_3 = (m_1, m_2) .$$

On peut réécire les formules ci-desssus sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(3;\mu;M_4)_i \\ -\Delta_2(3;\mu;M_3)_i \\ \Delta_3(3;\mu;M_2)_i \\ -\Delta_4(3;\mu;M_1)_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_1(2;\mu_1)_{i_1} & \Delta_1(2;\mu_2)_{i_2} & -\Delta_1(2;\mu_3)_{i_3} & 0 \\ \Delta_2(2;\mu_1)_{i_1} & -\Delta_2(2;\mu_2)_{i_2} & 0 & \Delta_1(2;\mu_2)_{i_4} \\ -\Delta_3(2;\mu_1)_{i_1} & 0 & \Delta_2(2;\mu_3)_{i_3} & -\Delta_2(2;\mu_2)_{i_4} \\ 0 & \Delta_3(2;\mu_2)_{i_2} & -\Delta_3(2;\mu_3)_{i_3} & \Delta_3(2;\mu_2)_{i_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

En rajoutant :

$$\begin{aligned} R(3;m_1,m_2,m_3;M)_i &= -x_1 \cdot \left\{ \Delta_1(2;\mu_1)_{i_1} - \Delta_2(2;\mu_1)_{i_1} + \Delta_3(2;\mu_1)_{i_1} \right\} \\ &+x_2 \cdot \left\{ \Delta_1(2;\mu_2)_{i_2} - \Delta_2(2;\mu_2)_{i_2} + \Delta_3(2;\mu_2)_{i_2} \right\} - x_3 \cdot \left\{ \Delta_1(2;\mu_3)_{i_3} - \Delta_2(2;\mu_3)_{i_3} + \Delta_3(2;\mu_3)_{i_3} \right\} \\ &+x_4 \cdot \left\{ \Delta_1(2;\mu_2)_{i_4} - \Delta_2(2;\mu_2)_{i_4} + \Delta_3(2;\mu_2)_{i_4} \right\} = 0 \ . \end{aligned}$$

Le théorème ci-dessous généralise ces exemples.

2.7. *Théorème.* On a

$$R(n;m_1,\ldots,m_n;M)_i = 0$$

pour tous $n, m_1, \ldots, m_n, M$ et i.

Démonstration : elle se fait par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est l'exemple 2.5.

Le passage de $n-1$ à n suit l'exemple 2.6.

Posons pour abréger

$$\mu = (m_1, \ldots, m_n) \ .$$

À partir de cela, on introduit $n+1$ vecteurs $\mu_j \in \mathbb{Z}^{n-1}$:

$$\mu_j := (m_1, \ldots, \hat{m}_j, \ldots, m_n),$$

$j = 1, \ldots, n$, et

$$\mu_{n+1} := (m_1, \ldots, \hat{m}_{n-1}, m_n) = \mu_{n-1} \ .$$

On définit le vecteur

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}) := (\underbrace{i, i, \ldots, i}_{n-1 \text{ fois}}, i + m_{n-1} - m_n, m_{n-1} + m_n - 1) \in \mathbb{Z}^{n+1} \ .$$

En développant les déterminants $\Delta_j(n;\mu,M_{n+2-j})_i$, $2 \le j \le n+1$ suivant la deuxième colonne et le déterminant $\Delta_1(n;\mu,M_{n+1})_i$ suivant la deuxième ligne, on obtient :

$$R(n;\mu;M)_i = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j x_j R(n-1;\mu_j;M_{1j})_{i_j} \ .$$

Ici M_{1j} est la matrice obtenue en enlevant la première ligne et la j-ième colonne de la matrice M.

Notre assertion en découle immédiatement par récurrence sur n.

2.8. On aura besoin d'un cas particulier de ces relations. Prenons

$$\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_n) = (2, 3, \ldots, n+1) \ .$$

Pour la matrice M, prenons

$$M = \begin{pmatrix} b(1)_3 & b(2)_4 & b(2)_5 & \ldots & b(2)_{n+2} & b(2)_{i+n+1} \\ b(1)_4 & b(2)_5 & b(3)_5 & \ldots & b(3)_{n+3} & b(3)_{i+n+2} \\ . & . & . & . & . & . \\ b(1)_n & b(2)_{n+1} & b(3)_{n+2} & \ldots & b(n-1)_{2n-1} & b(n-1)_{i+2n-2} \end{pmatrix} \ .$$

Alors le premier déterminant

$$\Delta_1(n; \mu; M_{n+1})_{i+2n} = c(n+1)_i \ .$$

On pose par définition :

$$c(n+1)'_i := \Delta_2(n; \mu; M_n)_{i+2n} \ ,$$

$$c(n+1)''_i := \Delta_3(n; \mu; M_{n-1})_{i+2n} \ .$$

Par contre, si $j \geq 4$ on voit que dans le déterminant $\Delta_j(n; \mu; M_{n+2-j})_{i+2n}$ la dernière colonne est égale à la $(n-j+3)$-ième colonne, d'où

$$\Delta_4(n; \mu; M_{n-2})_{i+2n} = \Delta_5(n; \mu; M_{n-3})_{i+2n} = \ldots = \Delta_{n+1}(n; \mu; M_1)_{i+2n} = 0 \ .$$

Donc 2.7 entraîne

2.9. *Corollaire.* Pour tous $n \geq 3$

$$c(n)_i - c(n)'_i + c(n)''_i = 0 \ .$$

§ 3. Début de la démonstration du théorème 1.5

3.1. On a

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \ .$$

La dérivée :

$$f_1(x) = f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 = n a_n \left\{ x^{n-1} + \tfrac{(n-1) a_{n-1}}{n a_n} x^{n-2} + \ldots + \tfrac{a_1}{n a_n} \right\}$$
$$= \gamma_1 (c(1)_0 x^{n-1} + c(1)_1 x^{n-2} + \ldots + c(1)_{n-1}) \ .$$

3.2. Le quotient de la division euclidienne de deux polynômes $f(x)$ et $g(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + a'_{n-2} x^{n-2} + \ldots$ est égal à

$$\frac{a_n}{a'_{n-1}}\,x + \frac{a'_{n-1}a_{n-1}-a'_{n-2}a_n}{(a'_{n-1})^2}\ .$$

On fait la division euclidienne :

$$f-(x/n+a_{n-1}/n^2a_n)f' = \frac{2na_na_{n-2}-(n-1)a_{n-1}^2}{n^2a_n}x^{n-2}+\frac{3na_na_{n-3}-(n-2)a_{n-1}a_{n-2}}{n^2a_n}x^{n-3}+\dots$$
$$=\frac{1}{n^2a_n}\cdot(b(1)_2x^{n-2}+b(1)_3x^{n-3}+\dots+b(1)_n) = -\gamma_2\cdot(c(2)_0x^{n-2}+c(2)_1x^{n-3}+\dots c(2)_{n-2})\ .$$

Donc

$$f_2(x)=\gamma_2\cdot\sum_{i=0}^{n-2}c(2)_ix^{n-2-i}\ .$$

Cela démontre l'assertion 1.5 pour $j=1,2$, et l'on procède par récurrence par j.

3.3. On suppose que l'on a déjà trouvé :

$$f_{j-1}(x)=\gamma_{j-1}\cdot[c(j-1)x^{n-j+1}+c(j-1)_1x^{n-j}+\dots+c(j-1)_ix^{n-j+1-i}+\dots]$$

et

$$f_j(x)=\gamma_j\cdot[c(j)x^{n-j}+c(j)_1x^{n-j-1}+\dots+c(j)_ix^{n-j-i}+\dots]\ .$$

On fait la division euclidienne :

$$f_{j-1}(x)-\Big(\frac{\gamma_{j-1}c(j-1)}{\gamma_jc(j)}x+\gamma_{j-1}\Big[c(j-1)_1-\frac{c(j-1)}{c(j)}\cdot c(j)_1\Big]\cdot\frac{1}{\gamma_jc(j)}\Big)f_j(x)=$$

$$=\sum_{i=2}^{n-j+1}\gamma_{j-1}\Big\{c(j-1)_i-\frac{c(j-1)}{c(j)}\cdot c(j)_i-\Big[c(j-1)_1-\frac{c(j-1)}{c(j)}\cdot c(j)_1\Big]\cdot\frac{c(j)_{i-1}}{c(j)}\Big\}\cdot x^{n-j+1-i}=$$

$$=\frac{\gamma_{j-1}}{c(j)^2}\sum_{i=2}^{n-j+1}\Big\{c(j-1)_ic(j)^2-c(j-1)c(j)c(j)_i-c(j-1)_1c(j)_{i-1}c(j)+c(j-1)c(j)_1c(j)_{i-1}\Big\}\cdot x^{n-j+1-i}\ .$$

On pose :

$$Q(j)_i:=c(j-1)_ic(j)^2-c(j-1)c(j)c(j)_i-c(j-1)_1c(j)_{i-1}c(j)+c(j-1)c(j)_1c(j)_{i-1} \tag{3.3.1}$$

Alors on a :

$$f_{j+1}(x)=-\frac{\gamma_{j-1}}{c(j)^2}\sum_{i=2}^{n-j+1}Q(j)_ix^{n-j+1-i}$$

Il faut montrer que

$$f_{j+1}(x)=\gamma_{j+1}\sum_{i=0}^{n-j-1}c(j+1)_ix^{n-j-1-i}=\gamma_{j+1}\sum_{i=0}^{n-j+1}c(j+1)_{i-2}x^{n-j+1-i}$$

où

$$\gamma_{j+1} = \gamma_{j-1} \cdot \frac{c(j-1)^2}{c(j)^2} \ .$$

Donc notre théorème est équivalent à l'identité suivante :

$$Q(j)_i = -c(j)^2 c(j+1)_i \ . \tag{3.3.2}$$

§ 4. Formule (A)

4.1. Revenons à notre algèbre $\mathfrak{B}$.

On considère la matrice $n \times n$

$$C(n+1)_{i-2} = \begin{pmatrix} b(1)_2 & b(1)_3 & \dots & b(1)_n & b(1)_{n+1} \\ b(1)_3 & b(2)_4 & \dots & b(2)_{n+1} & b(2)_{n+2} \\ . & . & \dots & . & . \\ b(1)_n & b(2)_{n+1} & \dots & b(n-1)_{2n-2} & b(n-1)_{2n-1} \\ b(1)_{n+i-1} & b(2)_{n+i} & \dots & b(n-1)_{2n+i-3} & b(n)_{2n+i-2} \end{pmatrix} .$$

Donc $c(n+1)_{i-2} = \det C(n+1)_{i-2}$.

Si l'on désigne par $C(n+1)_{i-2;\hat{p},\hat{q}}$ la matrice $C(n+1)_{i-2}$ avec la p-ième ligne et la q-ième colonne enlevée, on aura :

$$c(n) = \det C(n+1)_{i-2;\hat{n},\hat{n}} \ ,$$

$$c(n)_{i-1} = \det C(n+1)_{i-2;\widehat{n-1},\hat{n}} \ .$$

En plus, on a :

$$c(n)''_i = \det C(n+1)_{i-2;\widehat{n-2},\hat{n}}$$

où $c(n)''_i$ a été introduit dans 2.9.

4.2. *Théorème.* Pour tous $n, i \in \mathbb{Z},\ n \geq 3$, on a la relation suivante dans $\mathfrak{B}$

$$c(n-1)_i c(n)^2 - c(n-1)c(n)c(n)_i - c(n-1)_1 c(n)_{i-1} c(n) + c(n-1)c(n)_1 c(n)_{i-1}$$
$$= -c(n-1)^2 c(n+1)_{i-2} \tag{F}$$

On a vu que notre théorème principal 1.5 est une conséquence de (F) : en effet (F) coïncide avec la formule (3.3.2) (avec j remplacé par n).

À son tour, (F) est une conséquence immédiate de deux formules :

$$c(n-1)_i c(n) - c(n-1)_1 c(n)_{i-1} = -c(n-1)c(n)''_i \tag{A}$$

ou bien

$$c(n-1)_i c(n) - c(n-1)_1 c(n)_{i-1} + c(n-1)c(n)''_i = 0 \tag{A'}$$

et

$$\left\{c(n)_i + c(n)''_i\right\} \cdot c(n) - c(n)_1 c(n)_{i-1} = c(n-1)c(n+1)_{i-2} \ . \tag{B}$$

La démonstration de (B) utilise les relations quadratiques entre les lettres $b(i)_j$. Par contre, (A) est "élémentaire", en ce sens que cette identité n'utilise pas de relations entre les lettres $b(i)_j$.

Pour démontrer (A), on applique le lemme suivant (une variante des relations de Plücker) :

4.3. *Lemme.* (A_n) Considérons n vecteurs de dimension $n-1$, $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{i,n-1})$, $i = 1, \ldots, n$. À partir d'eux, on définit n vecteurs de dimension $n-2$: $v_i = (w_{i1}, \ldots, w_{i,n-2})$. On pose :

$$W_i = \det(w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)^t \ ,$$

$$V_{ij} := \det(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)^t \ .$$

Alors

$$V_{n-2,n-1} \cdot W_n - V_{n-2,n} \cdot W_{n-1} + V_{n-1,n} \cdot W_{n-2} = 0 \ .$$

(B_n) Considérons n vecteurs de dimension $n-2$, $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{i,n-2})$, $i = 1, \ldots, n$. Considérons les mineurs

$$V_{ij} := \det(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_n)^t \ .$$

Alors pour chaque $i < n-2$,

$$V_{n-2,n-1} \cdot V_{i,n} - V_{n-2,n} \cdot V_{i,n-1} + V_{n-1,n} \cdot V_{i,n-2} = 0 \ .$$

En effet, en développant W_i par rapport à la dernière colonne, on obtient : $(B_n) \Rightarrow (A_n)$.

Par contre, pour vérifier (B_n), considérons la matrice $(n-1) \times (n-2)$, $W^{\sim} = V_i$. Alors on aura $V_{ij} = W_j^{\sim}$, $j = n, n-1, n-2$. D'un autre côté, en développant les mineurs dans (B_n) : V_{pq}, $n-2 \leq p < q \leq n$ par rapport à la i-ième ligne, on obtient les mineurs $V_{pq}^{\sim}$, où $V^{\sim}$ est obtenue de $W^{\sim}$ en enlevant la dernière colonne. On vérifie que (B_n) se réduit à (A_{n-1}) correspondant à $W^{\sim}$.

Il s'ensuit que $(A_{n-1}) \Rightarrow (B_n)$ et on conclut par récurrence.

4.4. Le lemme étant vérifié, l'assertion 4.2 (A) est 4.3 (A_n) pour la matrice W égale à $c(n+1)_{i-2}$ avec la dernière colonne enlevée.

§ 5. Formule (B)

5.1. Maintenant on s'occupe de la formule

$$P := \left\{c(n)_i + c(n)_i''\right\} \cdot c(n) - c(n)_1 c(n)_{i-1} = c(n-1) c(n+1)_{i-2} \ . \qquad (B)$$

On introduit n vecteurs de dimension $n-1$, $w_1, \ldots, w_n$ qui sont les lignes de la matrice $c(n+1)_{i-2}$ sans la dernière colonne :

$$W = \begin{pmatrix} b(1)_2 & b(1)_3 & \ldots & b(1)_{n-1} & b(1)_n \\ b(1)_3 & b(2)_4 & \ldots & b(2)_n & b(2)_{n+1} \\ . & . & \ldots & . & . \\ b(1)_{n-1} & b(2)_n & \ldots & b(n-2)_{2n-4} & b(n-2)_{2n-3} \\ b(1)_n & b(2)_{n+1} & \ldots & b(n-2)_{2n-3} & b(n-1)_{2n-2} \\ b(1)_{n+i-1} & b(2)_{n+i} & \ldots & b(n-2)_{2n+i-4} & b(n-1)_{2n+i-3} \end{pmatrix}$$

et n mineurs

$$W_i = \det(w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)^t, \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Par exemple, $W_n = c(n),\ W_{n-1} = c(n)_{i-1},\ W_{n-2} = c(n)''_i$. Donc,

$$\begin{aligned} c(n+1)_{i-2} &= b(n)_{2n+i-2}W_n - b(n-1)_{2n-1}W_{n-1} \\ &\quad + b(n-2)_{2n-2}W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}b(1)_{n+1}W_1 \qquad (5.1.1) \\ &= b(n)_{2n+i-2}W_n - b(n-1)_{2n-1}W_{n-1} + R \end{aligned}$$

où

$$R = b(n-2)_{2n-2}W_{n-2} - b(n-3)_{2n-3}W_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}b(1)_{n+1}W_1 \ . \quad (5.1.2)$$

5.2. On a $n-1$ relations linéaires entre les W_i : la i-ième est obtenue en ajoutant à W sa i-ième colonne et en développant le déterminant $= 0$ par rapport à la dernière colonne.

Explicitement :

$$b(n-1)_{2n+i-3}W_n - b(n-1)_{2n-2}W_{n-1} + b(n-2)_{2n-3}W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}b(1)_nW_1 = 0 \ ,$$

$$b(n-2)_{2n+i-4}W_n - b(n-2)_{2n-3}W_{n-1} + b(n-2)_{2n-4}W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}b(1)_{n-1}W_1 = 0 \ ,$$

$$\ldots$$

$$b(2)_{n+i}W_n - b(2)_{n+1}W_{n-1} + b(2)_nW_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2}b(2)_4W_2 + (-1)^{n-1}b(1)_3W_1 = 0 \ ,$$

$$b(1)_{n+i-1}W_n - b(1)_nW_{n-1} + b(1)_{n-1}W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2}b(1)_3W_2 + (-1)^{n-1}b(1)_2W_1 = 0 \ .$$

5.3. D'autre part, rappelons la matrice $c(n)_1$:

$$c(n)_1 = \det \begin{pmatrix} b(1)_2 & b(1)_3 & \ldots & b(1)_{n-1} & b(1)_n \\ b(1)_3 & b(2)_4 & \ldots & b(2)_n & b(2)_{n+1} \\ . & . & \ldots & . & . \\ b(1)_{n-1} & b(2)_n & \ldots & b(n-2)_{2n-4} & b(n-2)_{2n-3} \\ b(1)_{n+1} & b(2)_{n+2} & \ldots & b(n-2)_{2n-2} & b(n-1)_{2n-1} \end{pmatrix} .$$

On développe cette quantité par rapport à la dernière colonne :

$$c(n)_1 = b(n-1)_{2n-1}c(n-1) - b(n-2)_{2n-3}M_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}b(2)_{n+1}M_2 + (-1)^n b(1)_nM_1 \ .$$

Après la multiplication par $-c(n)_{i-1} = -W_{n-1}$ on obtient :

$$-c(n)_1 c(n)_{i-1} = -b(n-1)_{2n-1} c(n-1) W_{n-1} \ (*) + R'$$

où

$$\begin{aligned} R' = {} & b(n-2)_{2n-3} W_{n-1} M_{n-2} - b(n-3)_{2n-4} W_{n-1} M_{n-3} + \ldots \\ & + (-1)^n b(2)_{n+1} W_{n-1} M_2 + (-1)^{n-1} b(1)_n W_{n-1} M_1 \ . \end{aligned}$$

5.4. Maintenant remplaçons dans R' les termes $(-1)^i b(n-i)_{2n-i-1} W_{n-1}$ en utilisant les relations 5.2 :

$$b(n-2)_{2n-3} W_{n-1} = b(n-2)_{2n+i-4} W_n + b(n-2)_{2n-4} W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} b(1)_{n-1} W_1 \ ,$$

$$\ldots$$

$$b(2)_{n+1} W_{n-1} = b(2)_{n+i} W_n + b(2)_n W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2} b(2)_4 W_2 + (-1)^{n-1} b(1)_3 W_1 \ ,$$

$$b(1)_n W_{n-1} = b(1)_{n+i-1} W_n + b(1)_{n-1} W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2} b(1)_3 W_2 + (-1)^{n-1} b(1)_2 W_1 \ .$$

Alors on obtient :

$$-c(n)_1 c(n)_{i-1} = -b(n-1)_{2n-1} c(n-1) W_{n-1} \ (*)$$

$$+ \big\{ b(n-2)_{2n+i-4} M_{n-2} - \ldots + (-1)^n b(2)_{n+i} M_2 + (-1)^{n+1} b(1)_{n+i-1} M_1 \big\} \cdot c(n) + R'',$$

où :

$$R'' = \left\{ b(n-2)_{2n-4} W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} b(1)_{n-1} W_1 \right\} \cdot M_{n-2} - \ldots$$

$$+ (-1)^n \cdot \left\{ b(2)_n W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2} b(2)_4 W_2 + (-1)^{n-1} b(1)_3 W_1 \right\} \cdot M_2$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \left\{ b(1)_{n-1} W_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2} b(1)_3 W_2 + (-1)^{n-1} b(1)_2 W_1 \right\} \cdot M_1 \ .$$

5.5. *Lemme.* $R'' = c(n-1) R$.

Démonstration. On introduit les vecteurs de dimension $n-2$:

$$\mathcal{W} = \big((-1)^{n+1} W_1, (-1)^{n+2} W_2, \ldots, W_{n-2} \big) \ ,$$

$$\mathcal{M} = \big((-1)^{n+1} M_1, (-1)^{n+2} M_2, \ldots, M_{n-2} \big)$$

et

$$b = \big(b(1)_{n+1}, b(1)_{n+2}, \ldots, b(1)_{2n-2} \big) \ .$$

Alors la définition de R'' se récrit :

$$R'' = \mathcal{M} \cdot C(n-1) \cdot \mathcal{W}^t \tag{5.5.1}$$

(où $c(n-1) = \det C(n-1)$, la matrice $C(n-2)$ étant symétrique) ; de plus,

$$R = b \cdot \mathcal{W}^t \ .$$

Maintenant développons les quantités M_i par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} M_i &= b(1)_{2n-2}M_{i,n-2} - b(1)_{2n-3}M_{i,n-3} + \ldots + (-1)^{n+2}b(1)_{n+2}M_{i2} + (-1)^{n+1}b(1)_{n+1}M_{i1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n+j} b(1)_{n+j} M_{ij}, \ \ i = 1, \ldots, n-2 \ . \end{aligned}$$

On remarque que les quantités M_{ij} sont les mineurs de la matrice $(n-2) \times (n-2)$ $C(n-1)$. Il vient :

$$\mathcal{M} = b \cdot \hat{C}(n-1)$$

où

$$\hat{C}(n-1) = \big((-1)^{i+j}M_{ij}\big),$$

donc $\hat{C}(n-1) \cdot C(n-1) = c(n-1)$. En substituant dans (5.5.1) :

$$R'' = b \cdot \hat{C}(n-1) \cdot C(n-1) \cdot \mathcal{W}^t = c(n-1) \cdot b \cdot \mathcal{W}^t = c(n-1)R,$$

cqfd.

5.6. Il s'ensuit que pour vérifier l'identité (B) il reste à démontrer que

$$\begin{aligned} c(n)_i + c(n)''_i + b(n-2)_{2n+i-4}M_{n-2} - \ldots \\ +(-1)^n b(2)_{n+i}M_2 + (-1)^{n+1}b(1)_{n+i-1}M_1 = b(n)_{2n+i-2}c(n-1) \ . \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Par contre, la quantité

$$b(n)_{2n+i-2}c(n-1) - b(n-2)_{2n+i-4}M_{n-2} + \ldots + (-1)^{n+1}b(2)_{n+i}M_2 + (-1)^n b(1)_{n+i-1}M_1$$

n'est autre que le développement de $c(n)'_i$ suivant la dernière colonne, donc (5.6.1) est équivalent à

$$c(n)_i + c(n)''_i = c(n)'_i \tag{5.6.2}$$

qui a été déjà prouvée, cf. Corollaire 2.9.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.2, et donc du 1.5.

5.7. *Démonstration du théorème* 1.9. En fait, nous l'avons déjà montré : la démonstration de la récurrence principale (3.3.2) n'utilise que les relations dans l'algèbre $\mathfrak{B}$.

Ces relations sont vérifiées si l'on définit les variables $b(i)_j$ à partir de coefficients de polynômes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ comme dans 1.8, d'où l'assertion.

DEUXIÈME PARTIE

POLYNÔMES D'EULER ET DÉTERMINANT DE CAUCHY

§ 1. Nombres $\beta(j)_i$

1.1. Rappelons que pour un polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

les nombres $b(j)_i$ sont définis par

$$b(j)_i = n\sum_{p=0}^{j-1} (i-2p)a_{n-p}a_{n-i+p} - j(n-i+j)a_{n-j}a_{n+j-i} \ .$$

On introduit les quantités :

$$q_i := \frac{a_{i-1}}{a_i} \ ,$$

$$r_i := \frac{q_{i-1}}{q_i} = \frac{a_i a_{i-2}}{a_{i-1}^2} \ ,$$

puis

$$\beta(j)_i := \frac{b(j)_i}{(n-i+j)a_{n-j}a_{n+j-i}} = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{n(i-2p)}{n-i+j} \cdot \frac{a_{n-p}a_{n+p-i}}{a_{n-j}a_{n+j-i}} - j \ .$$

1.2. Par exemple :

$$\beta(1)_2 = \frac{2n}{n-1} \cdot \frac{a_n a_{n-2}}{a_{n-1}^2} - 1 = \frac{2n}{n-1} \cdot r_n - 1 \ ,$$

$$\beta(1)_i = \frac{ni}{n-i+1} \cdot \frac{a_n a_{n-i}}{a_{n-1}a_{n-i+1}} - 1 \ .$$

On remarque que

$$\frac{a_n a_{n-i}}{a_{n-1}a_{n-i+1}} = \frac{q_{n-i+1}}{q_n} = r_{n-i+2}r_{n-i+1}\ldots r_n \ .$$

On définit les quantités

$$\psi(i,j) := \prod_{p=i}^{j} r_p$$

(donc $\psi(i,j)=1$ si $i>j$). Il s'ensuit :

$$\beta(1)_i = \frac{ni}{n-i+1}\cdot\psi(n-i+2,n)-1\ .$$

1.3. De même :

$$\frac{a_na_{n-i}}{a_{n-2}a_{n-i+2}} = \frac{a_na_{n-i}}{a_{n-1}a_{n-i+1}}\cdot\frac{a_{n-1}a_{n-i+1}}{a_{n-2}a_{n-i+2}} = \psi(n-i+2,n)\psi(n-i+3,n-1)\ .$$

Par exemple :

$$\frac{a_na_{n-4}}{a_{n-2}^2} = \psi(n-2,n)\psi(n-1,n-1) = r_{n-2}r_{n-1}^2r_n\ .$$

Il en découle :

$$\beta(2)_4 = \frac{4n}{n-2}\frac{a_na_{n-4}}{a_{n-2}^2}+\frac{2n}{n-2}\frac{a_{n-1}a_{n-3}}{a_{n-2}^2}-2 = \frac{4n}{n-2}r_{n-2}r_{n-1}^2r_n+\frac{2n}{n-2}r_{n-1}-2\,,$$

$$\beta(2)_i = \frac{ni}{n-i+2}\frac{a_na_{n-i}}{a_{n-2}a_{n-i+2}}+\frac{n(i-2)}{n-i+2}\frac{a_{n-1}a_{n-i+1}}{a_{n-2}a_{n-i+2}}-2$$

$$= \frac{ni}{n-i+2}\psi(n-i+2,n)\psi(n-i+3,n-1)+\frac{n(i-2)}{n-i+2}\psi(n-i+3,n-1)-2\ .$$

1.4. Un autre exemple :

$$\frac{a_na_{n-6}}{a_{n-3}^2} = \psi(n-4,n)\psi(n-3,n-1)\psi(n-2,n-2) = r_{n-4}r_{n-3}^2r_{n-2}^3r_{n-1}^2r_n\ .$$

1.5. En général on pose :

$$\phi(n,j,i) := \frac{a_na_{n-i}}{a_{n-j}a_{n-i+j}} = \prod_{q=0}^{j-1}\psi(n-i+j+q,n-q)$$

et l'on aura :

$$\beta(j)_i = \sum_{p=0}^{j-1}\frac{n(i-2p)}{n-i+j}\cdot\phi(n-p,j-p,i-p)-j\ .$$

1.6. Passons maintenant aux déterminants $c(n)$. On commence par un exemple :

$$c(4) = \det\begin{pmatrix} b(1)_2 & b(1)_3 & b(1)_4\\ b(1)_3 & b(2)_4 & b(2)_5\\ b(1)_4 & b(2)_5 & b(3)_6\end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} (n-1)a_{n-1}^2\beta(1)_2 & (n-2)a_{n-1}a_{n-2}\beta(1)_3 & (n-3)a_{n-1}a_{n-3}\beta(1)_4 \\ (n-2)a_{n-1}a_{n-2}\beta(1)_3 & (n-2)a_{n-2}^2\beta(2)_4 & (n-3)a_{n-2}a_{n-3}\beta(2)_5 \\ (n-3)a_{n-1}a_{n-3}\beta(1)_4 & (n-3)a_{n-2}a_{n-3}\beta(2)_5 & (n-3)a_{n-3}^2\beta(3)_6 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3})^2 \cdot \det \begin{pmatrix} (n-1)\beta(1)_2 & (n-2)\beta(1)_3 & (n-3)\beta(1)_4 \\ (n-2)\beta(1)_3 & (n-2)\beta(2)_4 & (n-3)\beta(2)_5 \\ (n-3)\beta(1)_4 & (n-3)\beta(2)_5 & (n-3)\beta(3)_6 \end{pmatrix} .$$

1.7. En général

$$c(m+1) = \left(\prod_{i=1}^{m} a_{n-i}\right)^2 \times$$

$$\times \det \begin{pmatrix} (n-1)\beta(1)_2 & (n-2)\beta(1)_3 & \dots & (n-m)\beta(1)_{m+1} \\ (n-2)\beta(1)_3 & (n-2)\beta(2)_4 & \dots & (n-m)\beta(2)_{m+2} \\ . & . & \dots & . \\ (n-m)\beta(1)_{m+1} & (n-m)\beta(2)_{m+2} & \dots & (n-m)\beta(m)_{2m} \end{pmatrix} .$$

§ 2. Polynômes d'Euler et fonction hypergéométrique

2.1. Suivant [Euler], on définit les polynômes

$$E_n(x) = \frac{1}{2}\{(1+ix/2n)^{2n} + (1-ix/2n)^{2n}\} . \tag{2.1.1}$$

Donc, $E_n(x)$ est un polynôme de degré $2n$, avec le terme constant 1, ne contenant que des puissances paires de x. Plus précisément,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \frac{x^{2k}}{(2n)^{2k}} . \tag{2.1.2}$$

Par exemple :

$$E_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 ,$$

$$E_2(x) = 1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{256}x^4 ,$$

$$E_3(x) = 1 - \frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{432}x^4 - \frac{1}{46656}x^6 ,$$

$$E_4(x) = 1 - \frac{7}{16}x^2 + \frac{35}{2048}x^4 - \frac{7}{65536}x^6 + \frac{1}{16777216}x^8 .$$

2.2. Rappelons que la fonction hypergéométrique de Gauß est définie par

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\alpha,\beta,\gamma)x^i,$$

où

$$c_i(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)}{i!\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+i-1)},$$

cf. [Gauß]. Il s'ensuit :

$$c_i(-n/2,-n/2+1/2,1/2)$$

$$= \frac{(-n/2)(-n/2+1)\ldots(-n/2+i-1)\cdot(-n/2+1/2)(-n/2+3/2)\ldots(-n/2+i-1/2)}{i!\cdot(1/2)(1/2+1)\ldots(1/2+i-1)}$$

$$= \frac{(-1)^i2^{-i}n(n-2)\ldots(n-2i+2)\cdot(-1)^i2^{-i}(n-1)(n-3)\ldots(n-2i+1)}{i!\cdot 2^{-i}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}$$

$$= \frac{2^{-i}\cdot n(n-1)(n-2)\ldots(n-2i+1)}{2^{-i}\cdot 2\cdot 4\ldots 2i\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)} = \binom{n}{2i}\ .$$

Donc

$$F(-n/2,-n/2+1/2,1/2,x^2) = \sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n}{2i}x^{2i} = \frac{1}{2}\{(1+x)^n+(1-x)^n\}\ . \tag{2.2.1}$$

Il en découle :

$$t^nF(-n/2,-n/2+1/2,1/2,u^2/t^2) = \frac{1}{2}\{(t+u)^n+(t-u)^n\}, \tag{2.2.2}$$

cf. [Gauß], no. 5, formula II.

2.3. La formule (2.2.1) implique :

$$E_n(x) = F(-n,-n+1/2,1/2,-x^2/4n^2)\ . \tag{2.3.1}$$

2.4. Si l'on écrit

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\ e_{nk}t^{2k},\ e_{nk} := (-1)^k\binom{2n}{2k}\frac{1}{(2n)^{2k}}$$

alors

$$e_{nk} = (-1)^k\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2k+1)}{(2k)!(2n)^{2k}} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{2n}\right)\ldots\left(1-\frac{2k-1}{2n}\right),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} e_{nk} = \frac{(-1)^k}{(2k)!},$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x,$$

comme il faut. En d'autres termes,

$$\lim_{n\to\infty} F(-n, -n+1/2, 1/2, -x^2/4n^2) = \cos x,$$

ou, comme aurait pu écrire Gauß,

$$F(-k, k+1/2, 1/2, -x^2/4k^2) = \cos x,$$

k étant "un nombre infiniment grand" (*denotante k numerum infinite magnum*). En fait, Gauß écrivit

$$F(k, k', 1/2, -x^2/4kk') = \cos x,$$

denotante k, k' numeros infinite magnos, cf. [Gauß], no. 5, formula XII.

§ 3. Asymptotiques

3.1. On pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \frac{x^k}{(2n)^{2k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \ . \tag{3.1.1}$$

Donc

$$E_n(x) = f_n(x^2) \ .$$

On désigne les quantités $b(j)_i, r_i$, etc. qui correspondent au polynôme f_n en ajoutant l'indice (n) en haut : $b(j)_i^{(n)}, r_i^{(n)}$, etc.

Donc on aura :

$$c(m+1)^{(n)} = \left(\prod_{i=1}^{m} a_{n-i}^{(n)}\right)^2 \times$$

$$\times \det \begin{pmatrix} (n-1)\beta(1)_2^{(n)} & (n-2)\beta(1)_3^{(n)} & \dots & (n-m)\beta(1)_{m+1}^{(n)} \\ (n-2)\beta(1)_3^{(n)} & (n-2)\beta(2)_4^{(n)} & \dots & (n-m)\beta(2)_{m+2}^{(n)} \\ . & . & \dots & . \\ (n-m)\beta(1)_{m+1}^{(n)} & (n-m)\beta(2)_{m+2}^{(n)} & \dots & (n-m)\beta(m)_{2m}^{(n)} \end{pmatrix} \ .$$

3.2. On a :

$$a_i^{(n)} = (-1)^i \binom{2n}{2i},$$

d'où

$$r_i^{(n)} = \frac{a_i^{(n)} a_{i-2}^{(n)}}{a_{i-1}^{(n)2}} = \frac{[(2i-2)!]^2 [(2n-2i+2)!]^2}{(2i)!(2n-2i)!(2i-4)!(2n-2i+4)!}$$

$$= \frac{(2i-2)(2i-3)}{2i(2i-1)} \cdot \frac{(2n-2i+1)(2n-2i+2)}{(2n-2i+3)(2n-2i+4)} \ .$$

En remplaçant i par $n-i$,

$$r_{n-i}^{(n)} = \frac{(2i+1)(2i+2)}{(2i+3)(2i+4)} \cdot \frac{(2n-2i-2)(2n-2i-3)}{(2n-2i)(2n-2i-1)} \ .$$

On s'interesse aux valeurs limites :

$$r_{\infty-i}^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} r_{n-i}^{(n)} = \frac{(2i+1)(2i+2)}{(2i+3)(2i+4)} \ .$$

Il s'ensuit :

$$\psi(\infty - i + 2, \infty) := \lim_{n\to\infty} \psi(n-i+2, n) = \frac{1\cdot 2}{(2i-1)2i} \ ,$$

$$\psi(\infty - i + 3, \infty - 1) = \frac{3\cdot 4}{(2i-2)(2i-3)} \ ,$$

$$\psi(\infty - i + 4, \infty - 2) = \frac{5\cdot 6}{(2i-4)(2i-5)} \ ,$$

etc.

3.3. Maintenant on veut calculer

$$\beta(j)_i^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} \beta(j)_i^{(n)} \ .$$

Il est commode de poser :

$$B(j)_i^{\infty} := \beta(j)_i^{(\infty)} + j \ .$$

On a :

$$B(1)_i^{(\infty)} = i \cdot \psi(\infty - i + 2, \infty) = \frac{1}{2i-1}$$

d'où

$$\beta(1)_i^{(\infty)} = -\frac{2(i-1)}{2i-1} \ .$$

Ensuite,

$$B(2)_i^{(\infty)} = i\cdot\psi(\infty-i+2,\infty)\psi(\infty-i+3,\infty-1) + (i-2)\cdot\psi(\infty-i+3,\infty-1)$$

$$= \psi(\infty-i+3,\infty-1)\cdot\left\{B(1)_i^{(\infty)} + i - 2\right\} = \frac{3\cdot 4}{(2i-2)(2i-3)}\cdot\left\{\frac{1}{2i-1} + i - 2\right\} = \frac{3\cdot 2}{2i-1},$$

d'où

$$\beta(2)_i^{(\infty)} = -\frac{4(i-2)}{2i-1} \ .$$

De même,

$$B(3)_i^{(\infty)} = \psi(\infty - i + 4, \infty - 2)\cdot\left\{B(2)_i^{(\infty)} + i - 4\right\} = \frac{5\cdot 6}{(2i-4)(2i-5)}\cdot\left\{\frac{3\cdot 2}{2i-1} + i - 4\right\} = \frac{5\cdot 3}{2i-1},$$

d'où

$$\beta(3)_i^{(\infty)} = -\frac{6(i-3)}{2i-1} \ .$$

3.4. En général, la récurrence évidente fournit

$$B(j)_i^{(\infty)} = \frac{(2j-1)\cdot j}{2i-1}$$

et

$$\beta(j)_i^{(\infty)} = -\frac{2j(i-j)}{2i-1} \ .$$

3.5. On définit les nombres

$$\mathfrak{c}(m+1)^{\infty} := \det\begin{pmatrix} \beta(1)_2^{(\infty)} & \beta(1)_3^{(\infty)} & \ldots & \beta(1)_{m+1}^{(\infty)} \\ \beta(1)_3^{(\infty)} & \beta(2)_4^{(\infty)} & \ldots & \beta(2)_{m+2}^{(\infty)} \\ . & . & \ldots & . \\ \beta(1)_{m+1}^{(\infty)} & \beta(2)_{m+2}^{(\infty)} & \ldots & \beta(m)_{2m}^{(\infty)} \end{pmatrix} \ .$$

Donc on aura :

$$\left(\prod_{i=1}^{m} a_{n-i}^{(n)}\right)^{-2} \cdot c(m+1)^{(n)} = \mathfrak{c}(m+1)^{\infty}\cdot n^m + O(n^{m-1}) \ .$$

Les calculs précédents fournissent par exemple :

$$\mathfrak{c}(4)^{\infty} = \det\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{5} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{7} & -\frac{12}{9} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{12}{9} & -\frac{18}{11} \end{pmatrix} = (-1)^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{3}{9} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{9} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^3\cdot 2^3\cdot (3!)^2\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \ .$$

En général on obtient

$$\mathfrak{c}(m+1)^{\infty} = (-1)^m\cdot 2^m\cdot (m!)^2\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \ldots & \frac{1}{2m+1} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \ldots & \frac{1}{2m+3} \\ . & . & \ldots & . \\ \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{2m+3} & \ldots & \frac{1}{4m-1} \end{pmatrix} \ .$$

On remarque que la dernière matrice (une variante de la matrice de Hilbert) est du type Hankel.

3.6. Le déterminant

$$\mathfrak{C}(m+1) := \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{2m+1} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{2m+3} \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{2m+3} & \cdots & \frac{1}{4m-1} \end{pmatrix}$$

est un cas particulier du déterminant calculé par Cauchy (d'où le caractère $\mathfrak{C}$), cf. son *Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées*, pp. 173 - 182 dans [Cauchy].

Rappelons que, étant données deux suites $x_1, \ldots, x_m$ et $y_1, \ldots, y_m$, le théorème de Cauchy dit que

$$\det\big((x_i + y_j)^{-1}\big)_{i,j=1}^{m} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{m} (x_i + x_j)}$$

d'où, en posant $x_i = 2i - 2, \ y_i = 2i + 1$,

$$\mathfrak{C}(m+1) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (2j - 2i)^2}{\prod_{i,j=1}^{m} (2i + 2j - 1)} \ .$$

Bibliographie

[Cauchy] Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, par le Baron Augustin Cauchy, Tome Deuxième, Paris, Bachelier, 1841 ; *Oeuvres complètes*, II-e série, tome **XII**, Gauthier-Villars, MCMXVI.

[Euler] L.Euler, De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur, *Miscellanea Berolinensia* **7**, 1743, pp. 172 - 192.

[Gauß] C.F.Gauß, Circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 +$ etc. Pars Prior, *Commentationes societatis regiae scientarum Gottingensis recentiores*, Vol. **II**, Gottingae MDCCCXIII.

[Jacobi] C.G.J. Jacobi, De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraitis, *Crelle J. für reine und angewandte Mathematik*, **15**, 1836, ss. 101 - 124.

[Sturm] C.-F. Sturm, Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences*, Sciences mathématiques et physiques, tome **VI**, 1835, pp. 271 - 318.