Felix Klein, Seminar on the Psychological Foundations of Mathematics

Translated by Eugene Chislenko
(draft)

Contents

[N.B. The transcription and translation are to run on facing pages.]

Translator's Introduction

I. Felix Klein

Felix Klein was one of the leading mathematicians of the 19th and early 20th centuries. Born in Düsseldorf, Germany in 1849, he studied in Bonn under Plücker, and then worked briefly in Göttingen under Alfred Clebsch and with the young Sophus Lie in Berlin and Paris. Plücker's sudden death and Clebsch's encouragement left him with unfinished projects in geometry, where he made his earliest and most lasting creative achievements. His first major result was the construction of the Klein model of non-Euclidean geometry, establishing that classical Euclidean geometry is consistent if and only if non-Euclidean is consistent as well. This put an end to the long controversy over the legitimacy of non-Euclidean geometry. After a brief military service in 1870 and his *Habilitation* in Göttingen in 1871, the 23-year-old Klein began his first professorship at the University of Erlangen, devoting his 1872 inauguration address to the role of mathematics among the other sciences and in society, to practical applications, and, above all, to "the general purpose of mathematics education, and especially the form we aspire to give to it at our universities",[4], p. 4. While at Erlangen he developed his revolutionary *Erlangen Program,* unifying the various geometries of the time by classifying them according to their corresponding groups of transformations. Over the next decade, he continued to do groundbreaking work in group theory, function theory, and related areas, though he still intended "to return one day to physics, and...to science in general" [5], p. 2.

In 1875 Klein married Anne Hegel, granddaughter of the philosopher G.W.F. Hegel (his notes record the "beginning of an ordered existence"[10], p.1), and together they moved to Munich, where Klein "tended a small flock of gifted mathematics students" [5], p.2 that included Hurwitz, Planck, and Ricci. They moved again in 1880, this time to Leipzig in Saxony, where Klein's most creative period would come to an end. Overstrained by an excessive workload and intense competition with Henri Poincaré over automorphic functions, he collapsed in 1882, unable to keep up his series of groundbreaking discoveries [8], p. 2:

> "Decisive illness: Overexertion as underlying cause. Total breakdown of serious productivity. Impossibility of carrying out academic and organisational work alongside general teaching activity with equal energy .... Image of the coat that is too wide for me."

Klein would never quite regain the brilliant mathematical creativity of his early years, and in his notes from 1883 he wrote: "My great productivity is entirely over" [10], p.3.

Soon, however, Klein entered a second period of great productivity, this time longer and of a different kind. In the Fall of 1885 he received a "call" from the University of Göttingen, and accepted immediately. In his private notes, he summarized the advantages: "house with garden, lighter duties, Prussia ...

Seeking: concentrated scientific existence on the basis of a sensible family life" [10], pp. 4-5. Meanwhile, the Prussian education ministry was implementing an aggressive policy of division of labor, concentrating the brightest minds in each major subject at one or two German universities. As one supporter put it [11], pp. 23-24:

> "[We have] to confront the caste-egoism of the cliquishly bonded faculty with an iron fist at the demand that their teaching be left to their own discretion without regard for the curricular requirements of their listeners, and at the same time deny the request that all disciplines be represented at all universities for the sake of student attendance. On the contrary–certain subjects should only be covered at one or two German universities, and there exceptionally well. It is and remains nonsense to lecture on Romance philology twenty and more times in front of two or three listeners .... It is also no less inconsiderate of the fame-seeking faculty towards the students to call every small new nuance a new science and even to endow new chairs for it, let alone at several universities."

It was thus decided to concentrate German mathematics and physics in Göttingen. Prussian education minister Friedrich Althoff, Klein's comrade from their army days in 1870, supported Klein's vision of reviving the great mathematical tradition developed in Göttingen by Gauss, Riemann, and Dirichlet earlier in the century, and Klein proved to be an extremely talented organizer and leader of mathematics. He recognized the extraordinary talent of the young David Hilbert and, with Althoff's support, succeeded in hiring him in 1895. Then, in 1902, he and Hilbert arranged for the establishment of a third chair in pure mathematics, unprecedented in German universities, for Hermann Minkowski. Klein, Hilbert, and Minkowski lived in Göttingen for the rest of their lives, leading a mathematical community that for many was the foremost in the world.

During his years in Göttingen, Klein founded the Göttingen Mathematics Association; built up the *Mathematische Annalen,* a journal started by Clebsch, into the leading mathematics journal in the country; edited the monumental *Encyclopedia of the Mathematical Sciences and their Applications;* and played a leading role in Germany's first national association of mathematicians. He cultivated contacts with many leading mathematicians abroad, inviting them to visit as well as traveling himself, and made repeated trips to the United States, where his Evanston Colloquium lectures at the World's Fair in Chicago were a great inspiration to the still nascent American mathematical community. He organized funding for a growing stream of talented American mathematics students to study with him in Göttingen, among them six future presidents of the American Mathematical Society. Klein himself was left deeply impressed by his experience in the United States [5], p. 4:

> "The World's Fair in Chicago in 1893 (where I was sent as commissar of the Ministry of Education) gave me powerful new impulses

> ... I allowed the conditions confronting me, especially the peculiar American system of education, to make an impression on me. I returned with the vivid conviction that it is our most urgent task to establish direct connections between our university operations and the controlling powers of practical life, first and foremost technology, but also the pressing questions of the general system of education ... I therefore mainly abandoned my own academic work from then on, and directed all of my energy toward establishing a cooperative interaction with others."

Klein now began to take an increasing interest in the applications of mathematics and in education reform. He soon formed the Göttingen Association for the Advancement of Applied Physics and Mathematics, an association that succeeded in doubling the number of professors in mathematics and physics and raised enough funding to establish the Institutes for Applied Electricity, Applied Mathematics and Mechanics, and Geophysics. Among the new faculty were Carl Runge, Ludwig Prandtl and Emil Wiechert. At the same time, Klein campaigned vigorously for a program of education reforms that became known as the Klein reforms. These included the introduction of the basic concepts of calculus in secondary schools, a lasting change in many countries. In 1908, the International Congress of Mathematicians, in which Klein had played a prominent part for many years, elected him as the first president of the newly founded International Commission on Mathematical Instruction, an organization still active today. He served in that capacity for several years, and oversaw several series of publications associated with the Commission. Throughout his career, Klein was a legendary teacher. Harry Walter Tyler, an American who studied with Klein soon after he left Leipzig, wrote back enthusiastically to William Osgood [15]:

> "I know of no one who can approach him as a lecturer.... He's certainly acute, fertile in resource, not only understands other people, but makes them understand him, and seems to have a very broad firm grasp of the philosophical relations and bearings of different subjects, as well as great versatility and acquaintance with literature."

This opinion was shared by many of his students, and many of them went on to become prominent in their own right. Among his more than 50 doctoral students were Cole, Fine, Fricke, Furtwängler, Harnack, Hurwitz, Ostrowski and van Vleck.
Klein retired in 1913, his career spanning almost the entire period of the German Empire, and died in Göttingen in 1925.

II. The Felix Klein Protocols

Klein had planned a new Mathematics Institute for Göttingen, and the expansive building, opened by Richard Courant soon after Klein's death, still houses

Göttingen's mathematics department today. Its library holds a locked " Giftschrank", or "poison cabinet", with an astounding collection of mathematical manuscripts and rare books left over from the two Golden Ages of Gauss, Riemann, Dirichlet, Klein, Hilbert, Minkowski, Courant, Weyl, and their colleagues. A recent *Report on the Göttingen Mathematical Institute Archive* [3] cites "a range of material unrivalled in quantity and quality": "No single archive is even remotely comparable," not only because Göttingen was "the leading place for mathematics in the world," but also because "no other community has left such a detailed record of its activity .... Usually we are lucky to have lecture lists, with no indication of the contents." The several hundred volumes, largely handwritten and mostly unique, run from early lectures by Dirichlet, Riemann and Clebsch through almost 100 volumes by Hilbert to volumes of Minkowski, Hasse and Siegel on number theory, Noether on algebra, and Max Born on quantum mechanics. But the largest and most impressive of the collection's centerpieces is Klein's *Seminar-Protokolle:* a detailed handwritten registry, spanning over 8000 pages in 29 volumes, of 40 years of seminar lectures by him, his colleagues and students, and distinguished visitors. These *Protocols* constitute one of the richest records of mathematical activity in modern times.

Klein conducted his seminars in both semesters of every year, from the Summer Semester of 1872 until just before his retirement in 1913. Presentations made in the seminars were painstakingly recorded in the Protocol books, usually by the speaker, just as Göttingen mathematics lectures were recorded in other notebooks and placed in the library for students' reference. Klein described the development of his ambitious teaching and research program in his Evanston lectures [7], p. 96:

> "As regards my own higher lectures, I have pursued a certain plan in selecting the subjects for different years, my general aim being to gain, in the course of time, a complete view of the whole field of modern mathematics, with particular regard to the intuitional or (in the highest sense of the term) geometrical standpoint."

Klein's drive toward completeness made him, along with Hilbert and Poincaré, the last of the mathematicians who could claim to have a grasp of the entire field. But his description is of his lecture courses, not of his seminars, for whose breadth and ambition this would be a clear understatement. His 40 years of seminars not only covered the major branches of the field, but expanded into mechanics, astronomy, geodesy, hydrodynamics, electricity, elasticity theory, and in the last years before his retirement, the psychology and teaching of mathematics. No wonder the presentations filled over 8000 pages! David Rowe wrote about the *Protocols:*

> "Although it would appear that few have perused them since they were first placed there, they are undoubtedly the best single source documenting the rich panoply of ideas that characterized Klein's teaching activity" [13], p.34 n.5.

The seminars from Erlangen and Munich show little unity of subject matter. Most of the 1870s seminars are catalogued as "Seminar on Various Topics" or "Seminar on Various Topics in Geometry and Algebra", and the entire record of that decade is contained in the first *Protocol* volume, most of whose entries are summaries a page or two in length. The constant change of topics from week to week can be seen in the presentation list in Klein's first seminar, taught jointly with Clebsch in Göttingen just before Klein's move to his first professorship. The presentations are on: *Geometric Problems of the 3rd and 4th Degree, The Physical Theory of the Northern Lights, Rational Transformations, The Elements of Arithmetic, Contributions to the Analytic Geometry of Space, The Imaginary in Geometry, On Scrolls of Degree 4, The Elements of Function Theory, Investigations on Algebraic Functions, On the Theory of Newtonian and Logarithmic Potential, The Distribution of Heat on a Sphere, The Tautochrone Problem,* and so forth. In May 1875 Klein reports on solutions of polynomial equations of degree 5 via elliptic functions; the records of 1876 show talks on magnetic curves, reflected light, and the effects of an electric point on an isolated metallic sphere. The seminars of 1877 contain notes on elastic strings, the distribition of heat in solids, Ampére's and Ohm's laws, the branching of electric current, and polarized light. The seminars of 1879 have reports on the 27 lines of cubic surfaces, Fresnel's wave surface, methods of enumerative geometry, and modular curves.

Soon the seminars become more focused. The 1880s seminars are almost exclusively on Klein's own research topics in function theory and group theory. The Winter 1882-83 seminar, for example, is on *Hyperelliptic, abelian and theta functions*, and the Winter 1885-86 seminar covers *Hyperelliptic functions and the Kummer surface.* As Klein later recalled, the early Göttingen years (beginning in 1886) were a period of transition [5], p. 3:

> "In the presence of Schwarz, there was — might say: fortunately — at first no way to make a wider impact on the multitude of students in Göttingen. But I used the first years in Göttingen, of course partly to continue my previously started work, but then especially to fill in the gaps in my mathematical-physical training, of which I was vividly aware, and which I had not been able to correct in my previous years of overwork."

Klein's colleague Schwarz had not yet made way for Hilbert, and Klein did not yet feel himself to have enough freedom or experience to rebuild his department as he saw fit. For the next ten years, from 1886 to 1896, he continued to conduct his seminars alone, and though he gave several lecture courses on mechanics, the seminars remained mainly in pure mathematics. Perhaps the last several of these seminars, as Klein insisted, "should be seen only as offshoots of my activity before 1892" [5], p.5, the year Klein intensified his interest in other fields. But "the change," as Klein describes it, "did not arrive in one fell swoop" [5], p.4.

The last 15 years of*Protocols*, from 1897 to 1912, show expansion in every sense. They fill over half of the Protocol volumes, go far beyond the range of subjects in the earlier seminars, and include many collaborations, at a time when Klein was at the peak of his powers as a leader of the international mathematics community. After teaching alone from 1872 to 1896, Klein taught four seminars in a row with Hilbert, and by 1909 he would co-teach five seminars with the physicist Karl Schwarzschild, six together with Ludwig Prandtl and Carl Runge, and, in 1905-7, a series of four seminars with both Hilbert and Minkowski on differential equations and automorphic functions. Meanwhile Klein, having warned against "the danger of a separation between abstract mathematical science and its scientific and technical applications" [7], p. 50, had also begun to place more and more emphasis on bridging mathematics and the other disciplines. Earlier seminars had already included presentation topics such as *Vibrations of a Violin String,* in the Winter Semester 1877 – 78, *The Theory of Billiards* in the Summer 1887 seminar on the theory of tops, and it The Calculation of Death Charts in the Summer 1893 seminar on probability theory. But these isolated presentations were still the exception. In 1898, after several years of seminars on pure mathematics, Klein and Hilbert jointly taught two seminars on mechanics, with presentations ranging from the more standard theoretical topics to *On the Bicycle* and *On the Theory of Billiards.* The Summer 1900 Seminar *Technical Applications of Elasticity Theory* contains some of the *Protocols'* most meticulously illustrated entries, including presentations on cupolas and on bridges. A subsequent mechanics seminar in the winter of 1901 – 02 includes a presentation *On Seismographs*, and the Winter 1900-01 seminar *Applications of Projective Geometry* includes reports on *Hermann Ritter's Perspectograph*, *Hauck-Mauer's Perspective-Drawing Apparatus*, *On Painter's Perspective*, and *Stereoscopic Vision.* The Summer 1911 seminar, taught jointly with Felix Bernstein, is devoted to insurance mathematics, with a special focus on "death charts", and biometrics, a recurring theme in the *Protocols.*

Looking through the volumes from the turn of the century, one finds a recurring interest in ships. The Winter Semester 1899-1900 seminar, devoted to *The Theory of Ships*, includes presentations ranging from fairly abstract to surprisingly specific: *On the Stable Balance of Swimming Bodies*, *On the Stability of Ships*, *Spatial Contents and Sinking of a Ship*, *Sails and Rudders*, *Ship Waves in a Canal*, and even *On the 'Seiches'*, a discussion of the occasional sudden changes in the water level on Lake Geneva, developing formulas with constant frequency and decreasing amplitude and showing their accord with empirical observations on the lake's shore. The Winter 1901-02 seminar on mechanics includes a presentation on *Ship Resistance in a Calm Sea*, and the winter 1903-04 seminar on hydrodynamics has one *On Turbines.* The entire Winter 1907-08 seminar, co-taught with Prandtl, Runge, and Wiechert, is a *Hydrodynamics Seminar with Special Attention to the Hydrodynamics of Ships.* Its presentations on more general topics in hydrodynamics give way to *Ship Waves*, *The Theory of Ship Propellers*, and *On Ship Resistance in Unbounded Water*, continuing through the first half of the next semester with *Ship Oscillation*, *Continuation of the Presentation on Ship Resistance*, *Lounz's Theory of Turbines*, and *Ship Resistance in Canals.*

One wonders how much the introduction of such topics into the nation's leading mathematics department had to do with the rapid buildup of the German navy in the decade before World War I.

Along with ship theory, the turn-of-the-century seminars show an increased emphasis on air and space. These topics can be found occasionally in the earlier volumes, starting in the very first pages of the *Protocols* with an 1872 presentation on the *Physical Theory of the Northern Lights*. But no significant part of any seminar before 1900 is devoted to these topics. The Summer 1902 seminar, by contrast, has astronomy as its general theme, and includes many presentations treating the moon and orbits. The Summer 1908 seminar *Dynamic Meteorology*, whose first half is the continuation of the winter seminar on ships, includes presentations on the *Thermodynamics of the Atmosphere*, treating topics such as humidity, the mixing of air masses, and cloud formation; *The General Circulation of the Atmosphere*; *Cyclones*; and *Helmholtz's Treatment of Atmospheric Movement.*

The final Protocol volume contains four seminars, three of them devoted to the psychology and education of mathematics. By this time Klein was running the International Commission on Mathematics Instruction, and these seminars ran partly in parallel with his efforts there. The Winter 1909-1910 seminar on the philosophy, psychology, and education of mathematics is the one translated in this volume, and described in more detail in the following section. The Winter 1910-1911 seminar covers mathematics education, running parallel to Klein's lecture course on the modern development of mathematics education and focusing especially on elementary schools. This seminar is one of the signs of his interest not only in universities, but in education at all levels. Several short presentations, mostly on various aspects on mathematics education in elementary schools, are followed by a unified series of lectures on *Teacher Education*, providing a tightly structured overview of the current structure and problems of training elementary school mathematics teachers. Rounding out the seminar are similar overviews of conditions in vocational schools, girls' schools, and in Austria.

The last seminar in the Protocols, planned by Klein but led during his illness by his former student Rudolf Schimmack, is an ambitious survey of the state of mathematics education across Europe. The presentations on Germany tend to compare the current system to the past and to other countries; among these are *To What Extent is Euclid's Teaching Continued in Today's German Schoolbooks?*, *On the Reform Movement in Germany*, and a *Comparison of the Organization of Higher Learning in Germany and France*. England and France receive special attention with reports on *The Highschool System and Traditional Euclid Lessons in England*, *Recent Reforms of Geometry Education in England*, *The Reform Movement in France*, and *The New Form of Geometry Education in France*. Other seminar participants cover *The Question of Geometry Education in Italy*, *Reform Efforts in Mathematics Education in Hungarian Middle Schools*, and *The Reform Movement in Arithmetic and Algebra Education in the United States and England*, and there are also *A Sketch of the School System in Switzerland*, a bleak report *On the Organization of Schools in Russia*, and a more hopeful report on Finland. *The State of Reform Efforts in Mathematics Education in Some Other Nations* summarizes some advances in Sweden and Romania, but laments that Belgium remains backward in many respects, and Holland "hardly better". Germany receives its share of comparative criticism as well; *The Intuitive Design of Basic Geometry Education*, for example, advocates a reorganization of German geometry education into a two-tier approach following that of Austria, so that students who do not reach the higher levels of education still have a thorough and intuitively comprehensible overview of geometry.

Klein's central role in the international reform of mathematics education lends an added importance to the records of his own discussions of education with his students and associates. But it also lends an added importance to the entire set of *Protocols.* While Klein spoke of attaining a view of the whole of mathematics, by the end of his career he had a nearly complete view of mathematics education as well, having toured the school and university systems of many countries and spoken with the leading educators of his time. The gradual rethinking and development of his seminars' structure and scope, of how he ran the seminars, how he assigned topics, what kinds of participation he encouraged, were the result of decades of the most serious and influential thinking about teaching itself. The *Protocol* volumes are, among other things, a career-long, step-by-step record of the development of one of the great modern educators. Even the mere existence of these 29 volumes is a monument to taking teaching seriously, and to believing in the importance of what one's students say.

III. The Seminar on Psychological Foundations

The Winter 1909-10 seminar stands out in several ways among Klein's seminars and among the *Protocols.* Held near the end of Klein's career, it is his only seminar devoted mainly to philosophical and psychological issues, and along with his two final seminars on education, the only one accessible to a broader audience without technical training. It is thus the seminar that's of widest intellectual interest, for the most part accessible to anyone and treating central questions in several fields. Its protocols are the record of an ambitious, multidisciplinary inquiry, rare at that time and even today, into how mathematical thought arises, combining mathematics, psychology, education, and philosophy, both contemporary and historical; the work of Gauss, Lie, Klein, Herbart, and Pestalozzi receives much of the seminar's focus, and Aristotle, Kant, Goethe, Schiller, Hegel, Comte, Spencer, and Bergson all make at least a brief appearance. The fundamental nature of the seminar's topics seems to have inspired an added interest among its participants as well. Klein, though active in seminar discussions, usually left most of the presentations and all of the protocol writing to his students and assistants, but this time he made ten presentations himself and wrote all of the seminar's protocols, including many comments on his own work and his creative process. Among the *Protocols,* this seminar is thus the best record of Klein's own views. At the same time, Klein managed to attract a "small but select society" [6], p.7 that included Felix Bernstein, Hermann Weyl, and Ernst Zermelo. Their meetings were Klein's meta-seminar, with leading mathematicians reflecting on mathematics as a whole and on how to teach it.

As his personal notes show, Klein had a vivid sense of the difficulty of his subject matter. He wrote both of "My *incompetence*. Neither earlier preliminary studies, nor any specific preparation now" and of the "impossibility of making certain things understandable to the students" [6], pp.1-3. He was especially concerned with collecting a group that could keep up a high level of conversation [6], p. 4:

> "Who should participate? - Necessity of a certain amount of previous mathematical knowledge. Philosophical disposition. Much time for real group work. Small presentations all the time.
> Cf. my view of seminars in general. They are not *publica* but *privatissima*. Mutual obligation.
> Here still also the danger of shallow dilettantism."

With that danger in mind, Klein kept the seminar's technical difficulty to a minimum (he wrote in a marginal note: *Leave formulas aside!* [6], p.20) while going as deeply as possible into the non-mathematical questions the seminar was intended to investigate. Its presentations show a constant and detailed coverage of leading theories in various fields, especially in philosophy, psychology, and education. As Klein explained: "what we are striving for: general *contact between philosophy and mathematics*, initiated by mathematics" [6], p.1.
The seminar was recorded in the *Protocols* as *Psychological Foundations of Mathematics*, though originally listed as *Mathematics and Psychology.* As Klein says in his opening speech (p.1),

> "The general topic is the points of contact between *mathematics* and *philosophy.* The more strictly *logical* questions will be treated in the parallel lecture course by Zermelo; here we shall discuss all of the other mental processes which accompany the logical processes and in part precede them, and which are here simply called *psychological*."

In preparing for his opening speech, Klein had written down: "Definition of psychology: the science of the formation = development of the mental functions" [6], p. α; the seminar's overarching theme is thus the formation or development of the mental functions involved in mathematics. Its presentations take up the theme in every sense of those words: the formation of individual mathematical insights (Gauss, Dirichlet, Lie, Klein, Cantor), the formation of general mathematical abilities (child psychology), the various forms mathematical ability can take (survey studies, untrained talents, classifications of mathematicians), the ways mathematical capacities shape and are shaped by other fundamental features of experience (space and time perception, the relation of mathematics to the other sciences), and methods of forming or developing mathematical abilities in other people (mathematics education). These concerns dominate the six topics Klein suggests in his opening speech:

1. On the working methods of productive mathematicians
2. On the formation of basic mathematical intuitions in the growing individual
3. The formation and epistemological importance of mathematical axioms
4. On the errors of mathematicians
5. Implications for mathematical instruction
6. On the position of mathematics in the system of the sciences

All of these topics—though the last one perhaps only indirectly—are concerned with how mathematical ideas and abilities are formed: how they first form, how they mis-form, and how we can give form to them.
The seminar's most recurring theme is the creative nature of mathematical productivity. Mathematical ideas, Klein insists, do not arise through anything like logical deduction. He describes how Gauss "finds the most remarkable results *inductively*, then forcing out the proofs through more intense and much more painstaking work" (p.11). Klein's series of four presentations on Sophus Lie begins by saying that "The example of Lie should at the same time show that in some circumstances mathematical production has extremely little to do with logical inference from given premises" (p.21); and the last of its four presentations culminates in an even stronger statement (p.38):

> " We do not see here anything like a determinate working plan with a goal fixed in advance. Everything rational withdraws strikingly: Lie had a relatively limited background and not in the slightest, as ly. A strong internal drive to production within the possibilities and stimulation provided by the environment! It is as with every other form of creation: 'The wind bloweth where it will, and thou hearest the voice thereof, but knowest not whence it cometh, and whither it goeth: so is every one that is born of the Spirit'."

More generally, as Klein put it, "One works. . . so to speak in a middle ground between intuition and conception" (p. 32).
Klein of course applied his views on mathematical creativity to his view of the importance of mathematics, and especially to his ideas about education, in which he had by that point become one of the most influential reformers of his time. He wrote in his personal notes [6], p. 15:
All other individual production arises just as much from the mysterious internal constitution of the individual as the production of the artist does. . . . Spiritual poverty of the logicists in Cauturat's vein, who believe the role of the mathematician to be exhausted by formal concatenation of syllogisms. They confuse the crystallized form with the chemical process.
If the underlying process is much more than a formal chain of syllogisms, then, one should think, this richer process is what we should cultivate, and not just by

imposing formal rules on it by memorization. The seminar presentations show a corresponding interest in modern theories of education that reacted against ”traditional scholastic pedagogy, which has children sequentially learn the theorems of a systematic textbook, e.g. Euclid” (p.46). The second half of the seminar includes repeated discussions of the theories of Herbart and Pestalozzi, with their guiding idea that “any natural elementary instruction must tie into the child’s ‘intuition’ ” (p.46), and a presentation on Brandford, who held that “At every point one should begin not with basic principles drilled into the child from outside, but with problems that he solves on his own” (p.43). Klein’s personal notes stress the “distinction between book knowledge and hands-on knowledge in modern pedagogy” [6], p 30.

On the other hand, Klein also insisted, as any good teacher would, that mathematical creativity takes extremely hard work over a long period of time. His presentation on Gauss (pp.11-13) is, among other things, an example to show that ”endless diligence achieves the preparation, until suddenly the liberating formation of ideas takes place. (Gauss, by the way, is supposed to have said that he differs from other mathematicians only in his diligence)” (p.13). Klein describes Lie “immersing himself unremittingly for weeks and months” before reaching any results, and Lie’s later insistence that he “lived” in the two spaces he was trying to map onto each other. Klein added in his personal notes at this point: “Here we have the *relentlessness* that stands out in all mathematical productivity” [6], p. 27. The immersion is for Klein essentially a matter of thinking, either alone or together. “External resources, libraries, guidance in lectures and exercises, are likewise only accessories. Personal interaction, cooperation, can be very important, missing in Gauss too” [6], p. 15. Klein’s seminar lectures thus present an image of mathematical productivity as a combination of creative talent and persistent effort, the effort both paving the way for flashes of insight and working through their results. As he summarized his view [6], p. 28:

> Concluding remarks about mathematical production.
>
> Exactly as with every other intellectual (artistic) production. The original ability, the relentless diligence, the course of the essential processes in the subconscious.

In relating his own working style, Klein elaborates on his general conception, describing an “encyclopedic disposition” [6], p. 8 to combine initially separate ideas or areas. His first presentation relates how he came to his groundbreaking results in non-Euclidean geometry; having learned the methods of projective geometry, he encountered non-Euclidean geometry and soon saw “that the two would have to be in accord with each other,” despite the older Karl Weierstrass’s conviction that “these were completely separate areas of the science” (p.7). Among the consequences was Klein’s proof, central to 19$^{\text{th}}$ century mathematics, that traditional Euclidean geometry is consistent if and only if non-Euclidean geometry is consistent as well. Klein goes on to comment more generally (p.11):

> “As for my own work, I have often proceeded in such a way that I viewed the results of two subareas as given and asked what the

> one means for the other. . . .In stating the corresponding theorems, I have let myself be guided in many cases by an indeterminate but in hindsight accurate feeling of analogy."

Klein's choice of subject matter for the seminar, like his career as a whole, was guided by this interest in the connections between disparate areas. One of his last presentations (p.54) attacks the idea of a strict separation of pure mathematics from its applications, and his longest series of presentations focuses on Sophus Lie's joining of French metric geometry with German line geometry. Here Klein's personal notes for the seminar, though mostly unpolished drafts of his lectures and *Protocol* entries, add some succinct remarks. He writes: "Typical with me: various people have done something, how do I bring it together?" [6], p. 15 A heading on Lie collects "ideas which Lie brought into being by fusing the two areas" [6], p. 19, and Klein describes his interest in Lie's work in much in the way he describes his own set of interests: "What is great here is that it is not just a matter of an appropriate classification, but that something beautiful comes out of it. Namely the organic integration of French metric geometry and German line geometry" [6], p. 26. He emphasizes the specifically geometrical integration: "In Lie the achievement of arriving at it by *geometrical* construction and making it an instrument of *geometrical* understanding and research" [6], p. 19. Such a geometrical understanding was not only Klein's own specialty, but, it seems, his paradigm of mathematical creativity in general. "That is interesting in itself, *geometrical appreciation* as the crucial moment of understanding as well as of discovery" [6], p. 18.
The seminar itself combines a focus on geometrical thinking with a constant interest in the varieties of mathematical talent. Weyl and Töplitz discuss psychological survey studies of mathematicians (pp. 6, 17-18); Klein's presentation on Gauss gives way to a report on two famous calculating talents, both without mathematical training, one of whom thought aurally and the other visually (pp.13-14); the presentations on education (pp.43-59, 61-62) react against methods that do not adapt to individual children; Felix Bernstein makes a presentation on types of mathematicians, distinguishing constructive and observing dispositions (60-61); and the entire series of presentations on Klein, Gauss, Dirichlet, Lie, and Cantor paints a picture of the variety of working methods. Klein's students discuss his own classification among others, asking: "Klein, in his *Evanston Colloquium*, divides mathematicians into philosophers, intuitionists and algorithmicians. What are we to think of this classification? What of the division into "classicists" and "romantics" that Ostwald makes generally among academic researchers in his book on *Great Men*?" (p.18) And the seminar's one sinister moment comes in an unforgettable presentation on racial differences, with some healthy tongue-in-cheek irony by Klein as he wrote the record:
Steckel relates some of the observations he believes himself to have made in the East concerning the conduct of members of different races (Germans, Poles, Jews) with regard to mathematical subject matter. Germans calculate $7\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$ in the form $= 7 - \frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$, thus grasping the task intuitively; Jews calculate $7\frac{1}{4} = 29/4$,

therefore $7\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 26/4 = 6\frac{1}{2}$, thus applying general logical rules. Poles tend to grasp only the words of the mathematical rules, which is how they then excel in language instruction as well.

Here one might recall Klein's note on the "danger of shallow dilettantism;" but the interest in variety is undeniable.

The seminar is rounded out by a series of presentations on space perception and the inner ear, and by a final presentation on the position of mathematics among the sciences, with Weyl among the presenters. One conspicuously absent topic is the writings of Poincaré. In the decade preceding the seminar, Henri Poincaré, the leading mathematician in France, had published a series of books that are among the major modern classics on almost all the topics in Klein's seminar. Poincaré's *La science et l'hypothèse* (1902), *La valeur de la science* (1905), and *Science et méthode* (1908) range across the connections between mathematics and the sciences, psychology, philosophy, and education, including reports of his own discoveries very much in the spirit Klein was looking for. Klein's notes even reiterate plans to discuss these works: "Analagous in Poincaré in …(in general writings of Poincaré);" "Who [will cover] Poincaré?;" "Poincaré. Science et méthode;" "Poincaré's self-report on the genesis of his 'fonctions fuchsiennes'." "Diverse abilities. Can types be distinguished? My account in the Evanston colloquium. Poincaré's account" [6], pp. 2, 5, 7, 9, and 10. It is something of a mystery why, despite so many recognized connections, the seminar's protocols contain only one brief mention of Poincaré (pp. 26-27). Even that mention is a criticism by Klein, and it may be that tensions had not yet cooled since their competition in the 1880s.

In part, though, Klein simply ran out of time. Looking back on his six suggested themes at the end of the semester, he wrote: "3 and 4 have remained untouched and will provide a natural subject matter for the planned summer seminar. 6 must still be supplemented too" [6], p. 44. Klein thus moved some of the most interesting topics into the following semester, another ambitious seminar with a more direct focus on foundations. His notes give a sense of the planned topics [6], pp. 19, 30, 33, 34, and 44:

> Collective undertaking for the summer = continuation of the seminar. Theory of knowledge. Zermelo.
>
> …*Paradoxes of set theory* belong to the summer semester.
>
> …Weyl [to report] on Husserl, arithmetic.
>
> …Question of the naïve form of the axioms. It is always different from what we adults suppose."
>
> …Peano and the formal logicians are not enough. Frege has much. *Foundations of Arithmetic*. The problem of gapless construction.
>
> …With regard to the classification of the sciences, what does Hegel have?

Unfortunately, Klein fell ill, and missed the summer semester. Except for a temporary recovery the following year, he would never teach another seminar at all.

But he did get a chance to develop many of the seminar's ideas in a different form. In his notes he had written: "I do not believe we will finish this in the winter. Eventual continuation in the summer, when I shall at the same time give a generally orienting lecture course: *Development of Mathematics in the 19th Century*" [6], p. 4. In his last years, Klein continued to expand these lectures, incorporating material from his presentations in the current seminar, and the unfinished two-volume work, edited by Richard Courant after Klein's death, was one of Klein's most lasting and widely read achievements. Readers interested in his topics can find much more on them in those lectures, translated into English as *Development of Mathematics in the Nineteenth Century*.
Compared to the other late *Protocols*, the record of the Winter 1909-1910 seminar is short, and at times more of a glimpse than an extensive report; it may be that Klein wanted to record the proceedings himself but did not have time for many of the details. But for that same reason, it also presents an unusual density of content that brings out the seminar's richness and variety. Like Gauss' famous diary, Klein's record offers a compact, wide-ranging overview of productive activity at the forefront of mathematics.

IV. A Note on the Text

The source text of the transcription and translation is Felix Klein's *Seminar-Protokolle*, vol. 29, pp. 1-72, held in the library of the Mathematics Institute of the University of Göttingen. No transcription or translation of any significant part of the *Protocols* has been previously published, but a recent initiative, organized by Yuri Tschinkel and sponsored by the Clay Mathematics Institute, digitized the entire set of handwritten volumes in November 2006. The images can be viewed at www.librarieswithoutwalls.org/klein.html, including the original German pages of the text transcribed and translated here.
Page numbers in brackets {xx}throughout the text follow the original pagination (pages 69 and 70 are blank and are omitted here). The transcription aims to stay as close as possible to the handwritten text, making only minor typographical corrections. The translation makes some slightly larger changes in modernizing and anglicizing the text, but still in minor respects such as footnote format and restoration of abbreviated words. All footnotes are Klein's unless otherwise noted.
I would like to thank James Carlson, Barry Mazur, and Norbert Schappacher for very helpful comments and suggestions, the Mathematics Institute in Göttingen for financial support, and the editors of *Notices of the American Mathematical Society* for permission to reprint parts of Eugene Chislenko and Yuri Tschinkel, *The Felix Klein Protocols* in the Translator's Introduction. Most of all, I am grateful to Yuri Tschinkel for constant encouragement and advice at every stage of the process; without him this book would not have been possible.

References

[1] Eugene Chislenko and Yuri Tschinkel, "The Felix Klein Protocols," *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 54 no. 8 (September 2007), 958-968.

[2] Günther Frei, ed., *Der Briefwechsel David Hilbert—Felix Klein*, Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1985.

[3] Jeremy Gray, "Report on the Göttingen Mathematical Institute Archive," Clay Mathematics Institute, 2005.

[4] Felix Klein, "Antrittsrede in Erlangen," in Konrad Jacobs, ed., *Felix Klein Handschriftlicher Nachlass*, Erlangen: Mathematisches Institut der Friedrich-Alexander-Universität, 1977.

[5] Felix Klein, "Entwicklungsgang meiner Vorlesungen und Arbeiten," in Konrad Jacobs, ed., *Felix Klein Handschriftlicher Nachlass*, Erlangen: Mathematisches Institut der Friedrich-Alexander-Universität, 1977.

[6] Felix Klein, Notes to the Seminar on Psychological Foundations. Available at the Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen under Nachlass Felix Klein, 21A: Psychologisches und Pädagogisches Seminar.

[7] Felix Klein, *The Evanston Colloquium*, Providence: AMS Chelsea, 2000.

[8] Felix Klein, "Persönliches betreffs Leipzig," in Konrad Jacobs, ed., *Felix Klein Handschriftlicher Nachlass*, Erlangen: Mathematisches Institut der Friedrich-Alexander-Universität, 1977.

[9] Felix Klein, *Seminar-Protokolle*, Mathematics Institute, University of Göttingen. Available online at www.librarieswithoutwalls.org/klein.html.

[10] Felix Klein, "Vorläufiges aus Erlangen, München, Leipzig," in Konrad Jacobs, ed., *Felix Klein Handschriftlicher Nachlass*, Erlangen: Mathematisches Institut der Friedrich-Alexander-Universität, 1977.

[11] Hermann Minkowski, *Briefe an David Hilbert*, Berlin: Springer, 1973.

[12] Constance Reid, *Hilbert*, New York: Springer, 1970.

[13] David Rowe, *Felix Klein, David Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition*, City University of New York dissertation, 1992.

[14] Renate Tobies, *Felix Klein*, Leipzig: Teubner, 1981.

[15] Harry Walter Tyler, Letter to William F. Osgood, April 28, 1889, available at the Archives of American Mathematics at the University of Texas. Quoted in [13] (see above), p.251.

German Transcription

{1} Wintersemester 1909-1910 (Mathem. u. Psychologie). Eröffnung des Seminars, 27. Okt. 1909.

Anwesend von Dozenten die Herren Bernstein und Nelson, die sich an der Leitung des Seminars beteiligen, sowie die Herren Töplitz und Zermelo.
Der Unterzeichnete entwickelt das Programm. Es handelt sich allgemein um die Berührungspunkte von Mathematik und Philosophie. Die im engeren Sinne logischen Fragen werden in der parallellaufenden Vorlesung Zermelos zur Behandlung kommen, hier soll von all' den anderen geistigen Prozessen geredet werden, welche die logischen Prozesse begleiten, zum Teil ihnen auch vorangehen, und hier kurz als psychologisch bezeichnet werden.
Der Betrieb wird der sein, dass ich selbst – oder auch einer der Herren Bernstein und Nelson – über die einzelne Frage einen allgemein orientierenden Vortrag hält, an den sich sofort Diskussion und Nennung zugehöriger Literatur schliesst.

{2} Die Studierenden übernehmen dann, über diese oder jene besonders interessante Veröffentlichung insbesondere zu referieren.
Hierbei muß eine gewisse Kenntniß der Prinzipien der heutigen wissenschaftlichen Mathematik vorausgesetzt werden, ausserdem eine Disposition zu philosophischem Nachdenken.
Die folgende Zusammenstellung von Thematen soll die Betätigung innerhalb des Seminars nicht festlegen, sondern nur einen gewissen Anhalt für die gestellte Aufgabe bieten:

1. Von der Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker
Die Art und Weise des Produzierens ist individuell ungemein verschieden. Hierüber werden interessante Selbstzeugnisse beizubringen sein, z.B. von Gauß.... Neuerdings Enquête der Zeitschrift *Enseignement*. In Deutschland Sammelforschung betr. übernormale Begabungen (Stern in Breslau, Lipmann in Neubabelsberg).

{3} 2. Vom Zustandekommen der mathematischen Grundanschauungen im heranwachsenden Individuum.
Sowohl Raumvorstellung (worüber von den Physiologen bez. experimentellen Psychologen viel gearbeitet ist) als Zahlvorstellung. - Interessant u.a. der Unterschied der mathematischen und der künstlerischen Raumauffassung.

3. Entstehung und erkenntnistheoretischer Wert der mathematischen Axiome.
Wie so durch Anschauung, oder durch Erfahrung etc gegeben? Vom Wesen des mathematischen Beweises.

4. Vom Irrtum der Mathematiker
Die Möglichkeit des Irrtums historisch konstatiert (Theorem von Maxwell). Säkulare Irrtümer, die erst durch die Entwickelung der Wissenschaften korrigiert werden, cf. Entdeckung der einseitigen Flächen, der Nicht-Euklidischen {4}

Geometrie, der stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten). - Individuelle Irrtümer, durch Zufälligkeiten veranlasst. - Typische Irrtümer, die sich nicht ausrotten lassen: immer wieder erneute Versuche der Kreisquadratur, der Winkeltrisektion. (Die bisherigen Beweise der Fermat'schen Satzes bilden Sammlung individueller Irrtümer).

5. Folgerungen betr. den mathematischen Unterricht.
Methoden des Kindergartens und der Volksschule: methodischer Aufbau einer rein descriptiven Raumlehre bez. einer rein praktischen Rechenunterrichts.
An den höheren Schulen Ineinandergreifen einer vorläufigen Propädeutik und einer strengeren Begründung.
An den Hochschulen: Mathematische Vorlesungen für Techniker oder Ingenieure, für eigentliche Mathematiker auf verschiedenen Stufen der Durchbildung.

{5} 6. Von der Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften.
Historisches über die Bedeutung des Wortes "Mathesis" im Altertum, in der Renaissance, etc.
Bedeutung des Wortes bei neueren Autoren.
Unser tatsächlicher Wirkungsbereich und die Geltung, die wir dementsprechend beanspruchen müssen

[In der Diskussion wurden noch verschiedene andere Themata in Vorschlag gebracht, z.B. Wechselbeziehung von Mathematik und Sprache, Wert der Bezeichnung innerhalb der Mathematik (cf. symbolische Methoden), Unterschiede von mathematischer Wissenschaft und math. Spiel, etc. etc.]

Klein

{6} Sitzung vom Mi. 3. Nov. 1909.

= Inangriffnahme des Themas I (Arbeitsweise der schaffenden Mathematiker).
Weyl berichtet über die betr. Enquête in den Bänden 1905-1908 des Enseignement. Sie kann nur als ein erster Vorstoss in der uns interessierenden Richtung angesehen werden. Denn weder die 30 Fragen noch die auf sie bezüglichen Antworten sind präcis genug, um darauf irgendwelche allgemeinen Schlüsse zu basieren.

{7} Klein erzählt von der Entstehung seiner Arbeiten über Nicht-Euklidische Geometrie (1871, 1872. Ueberarbeitung der Nicht-Euklidischen Geometrien mit den verschiedenen Fällen von Cayley's projektiver Maassbestimmung).
Klein hatte durch Plücker und Clebsch die projektive Denkweise gelernt, er hatte dann mit grosser Begeisterung Herbst 1869 Cayley's Abhandlung gelesen*. Er hörte dann im Winter 1869-70 (in Berlin) durch Stolz, der mit ihm dort studierte, einiges von dem Vorhandensein der Nichteuklidischen Geometrie. Es war ihm dann sofort selbstverständlich, dass beide Dinge übereinstimmen müssten.

*aufmerksam gemacht durch die Darstellung in Salmon-Fiedler

Er entwickelte diese Ansicht im Februar 1870 in dem von Weierstrass geleiteten math. Seminar am Schluss eines Vortrags über die Cayley'sche Maassbestimmung in Form einer Frage. Aber Weierstrass erwiederte, dass es sich um gänzlich getrennte Gebiete der Wissenschaft handelt. Hierauf liess Klein die Idee bis auf weiteres fallen.
Sie trat für ihn erst wieder hervor, als er im Sommer 1871 mit Stolz erneut zusammen war (diesmal in Göttingen). {8} Stolz erzählte ihm Einzelheiten aus Lobatscheffsky, v. Staudt, Beltrami (die Klein damals überhaupt nicht gelesen hat; auch heute noch kennt er sie sehr mangelhaft). Es ergab sich überall Uebereinstimmung mit der richtig verstandenen Cayleyschen Doktrin. Andererseits starke Hemmung durch die insbesondere von Lotze ausgehende Ansicht, dass die ganzen Nichteuklidischen Spekulationen unsinnig seien. Aus diesem Hin und Wider ist die erste Publikation erwachsen, die in kurzer Form in den Göttinger Nachrichten von August 1871 und bald darauf ausgeführt in Ann. 4 erschienen ist.
Die Abhandlung in Ann. VI (1872) lässt den grossen Widerstand erkennen, den die Darlegungen im Kreise der Mathematiker fanden. Auch Cayley selbst hat sich nie zu voller Zustimmung durcharbeiten können. Er sagte 1873 auf der Versammlung der British Association in Bradford, dass er das Parallelenaxiom als "strictly axiomatic" ansehe, und noch in Bd. II seiner gesammelten Werke p. 605 findet sich die Bemerkung, dass eine Begründung des Abstandsbegriff auf v. Staudts projektive Einführung der Koordinaten zum {9} mindesten den Anschein eines Zirkelschlusses hervorrufe.
Da liegt also ein Beispiel vor, dass eine bestimmte mathematische Einsicht zuerst in einem Individuum sozusagen präformiert ist und dann erst durch den Widerspruch, den sie findet, von diesem Individuum als ein Fortschritt empfunden und im Kampf mit allerlei Einwänden allseitig klar herausgearbeitet wird.
Die weitere Entwicklung ist dann die, dass die kommende mathematische Generation das Ergebnis von vornherein als etwas feststehendes rezipiert, die früheren Meinungsverschiedenheiten überhaupt nicht mehr versteht und über die ganze Sache mehr oder minder zur Tagesordnung übergeht.

Klein.

Pr. Helmholtz sagte mir, als ich ihn 1893 fragte, welche innere Beziehung für ihn zwischen der allgemeinen Geltung des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Gesamtphysik (1885) und der Geltung des Prinzips der Erhaltung der Kraft (1847) bestehe: für ihn bestehe die {10} Analogie darin, dass ihm Beides von Hause aus selbstverständlich sei.
[Was meine eigenen Arbeiten angeht, so bin ich oft in der Weise vorgegangen, dass ich die Resultate zweier Teilgebiete als gegeben ansah und fragte, was das eine für das andere bedeute. Man vergleiche als typisch die Benutzung der algebraischen Invariantentheorie bei meiner Einführung der hyperelliptischen und Abelschen σ-Funktionen, Math. Ann. Bd. 27, 32, 36. Ich habe mich bei der Aufstellung der betr. Sätze vielfach von einem unbestimmten aber hinterher richtigen

Gefühl der Analogie leiten lassen. Besonderes Vergnügen hat mir dies gemacht: ich wusste nicht recht, welche Invariante einer binären Form Sylvester Katalektikante genannt hatte, aber ich stellte mir vor, dass das erste Glied in der Reihenentwickelung gewisser hyperelliptischer Sigma eben dieser Katalektikante sein müsse. Hilbert hat mir erst geholfen, die Sache in Ordnung zu bringen, aber das Theorem, wie ich es vermutete, war wirklich richtig.]

Klein.

{11} Sitzung vom Mi. dem 10. Nov. 1909.

Klein erzählt einiges von Gauß' Arbeitsweise, wie sie uns zum Teil in Gauß' Briefwechsel, dann namentlich in dem besonders wichtigen Tagebuch entgegentritt, das in Ann. 57 veröffentlicht ist.

Gauß hat sehr frühzeitig begonnen (wie das übrigens auch Euler getan hat), sich für das Verhalten ganzer Zahlen ausserordentlich umfangreiche Tabellen zu entwerfen; vergl. etwa die in Bd. II abgedruckten Tafeln für die Dezimalbruchentwickelung von $1/\beta$ für alle Primzahlen unter 1000, oder die Auszählung der Primzahlen in den ersten 3 Millionen ebenda. Er muss sich aber auch mit den Zahlweiten der wichtigeren in der Analysis vorkommenden Konstanten, ihren Logarithmen etc. auf alle Weisen vertraut gemacht haben, so dass er in der Lage war, sie überall wiederzuerkennen. So vorbereitet findet er die merkwürdigsten Resultate induktiv, um dann in angestrengter und vielfach sehr mühsamer Arbeit die Beweise zu zwingen.
{12} Verhältnismässig naheliegend, und auch von anderen Autoren gebraucht, ist dies Verfahren in der Zahlentheorie; vergl. Gauß' Auffindung des Reziprozitätsgesetzes quadratischer Reste oder sein Vergleich der Primzahlfrequenz mit $\int dx/\log x$. Aber Gauß gebraucht die gleiche Methode auch in seinen Untersuchungen über elliptische Funktionen! Vergl. Nr. 63 des Tagebuchs, wo er den Faktor, um den sich die Thetafunktion der lemniscatischen Funktionen bei Vermehrung des Arguments um eine Periode vermehrt, durch numerische Rechnung $= e^{\pi/2}$ findet, oder Nr. 98, wo er entdeckt, dass das arithmetische Mittel von 1 und $\sqrt{2}$ bis auf die 11te Dezimale mit $\frac{\pi}{\tilde{\omega}}$ zusammenstimmt (unter $\tilde{\omega}$ die lemniscatische Periode verstanden)! Er fügt hinzu: "qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur". Und erst 6 Monate darauf beginnen sich die theoretischen Resultate einzustellen.
Sehr merkwürdig ist auch, wie er sich Olbers gegenüber über seine Vorzeichenbestimmung der "Gaussischen Summen" äussert, die ihm, dem Tagebuch zufolge, am 30. August 1805 gelungen war {13} (Nr. 123). Er schreibt unter dem 3. Sept. 1805: (Briefwechsel, Bd.I, p.268):

> "Alles Brüten, alles Suchen (nach dem Beweis des induktiv gefundenen Resultats) ist 4 Jahre lang umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tage ist's gelungen – aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst etc. etc."

(Das Genauere muß an Ort und Stelle nachgelesen werden).

Man sieht: unendlicher Fleiss schafft die Vorbereitung, bis sich plötzlich die befreiende Ideenbildung vollzieht. (Gauß soll übrigens geäussert haben, dass er sich nur durch seinen Fleiss von anderen Mathematikern unterscheide).

Hierauf berichtet Freundlich von der psychologischen Untersuchung der Verfahrungsweisen berühmter Kopfrechner. Nach Binet, les grands calculateurs et joueurs d'échec, Paris 1894, hat die Pariser Akademie bei den damals berühmten Rechnern {14} Inaudi und Diamondi als gemeinsam nur konstatieren können, dass beide ganz ohne mathematische Bildung waren; der erstere erwies sich durchaus auditiv, der letztere visuell veranlagt, womit zusammenhing, dass je nach der Art der Fragestellung bald der eine bald der andere rascher arbeitete. Der Rekord der Beiden ist seitdem längst geschlagen worden durch unseren Dr. Rückle, der bei Hilbert mit einer zahlentheoretischen Dissertation promovierte und dessen Rechenfertigkeit seitdem von G.E. Müller eingehend untersucht wurde (Mitteilung an den Psychologischen Kongress, Giessen, 190 ; - noch nicht veröffentlicht). Dr. Rückle tritt neuerdings auf Spezialitätenbühnen mit grossem Erfolg auf. Er unterscheidet sich jedenfalls dadurch von den sonst bekannten grossen Rechnern, dass er über wirkende mathematische Bildung verfügt und diese zweifellos auch bei der Durchführung seiner Rechenoperationen benutzt.

{15} Sitzung vom Di. dem 16. Nov. 1909 (verbunden mit Mathem. Gesellschaft).
Nelson verliest einen Brief des 22-jährigen Dirichlet an seine Mutter (datiert Dresden, 29. Okt. 1827). Dirichlet schildert darin, wie er sich lange vergebens mühte, Gauß' erste Mitteilungen über die Reziprozitätsgesetze der biquadratischen Reste zu beweisen.

> "Eines Abends, wo ich einsam auf der Elbebrücke wanderte, hatte ich einige Ideen, welche mich in den Besitz des so lange und eifrig gesuchten setzen zu müssen mienen. Auf der herrlichen Brühlschen Terrasse überliess ich mich mehrere Stunden lang meinen Gedanken, konnte aber dennoch mit der Sache nicht fertig werden. Mit sehr geschwächter Hoffnung legte ich mich zu Bette und brachte die Nacht sehr unruhig zu, bis ich endlich gegen 1 Uhr in einen ordentlichen Schlaf fiel, aus wem ich aber um 4 Uhr schon wieder erwachte, indem ich den Medizinalrat, der in derselben Stube schlief, mit dem Ausruf aufweckte: 'Ich habe es gefunden'. Aufstehen, Licht anzünden und mich mit der Feder in der Hand von der {16} Richtigkeit der Sache überzeugen, war die Sache eines Augenblicks. etc. etc.".

[Ähnliche Selbstangaben über das plötzliche Zustandekommen der geeigneten Gedankenwendung besitzt Töplitz betr. Rosenhaus].

Freundlich berichtet im Anschluss an seinen vorigen Vortrag, was Binet über die Psychologie der grossen Schachspieler, insbes. der Blindlingsspieler zu sagen weiß. Ueberraschend ist, dass bei letzteren keineswegs das visuelle Gedächtniss eine ausschlaggebende Rolle spielt, sondern vielmehr die logische Verknüpfung der sämmtlichen Züge der einzelnen Partie. Dementsprechend haftet die Erinnerung sehr viel länger, als bei den Zahlenrechnern, wie denn z.B. Tarrasch sich nach noch 12 Jahren einzelner gespielter Partien genau erinnern konnte. Zu irgend welcher fassbaren allgemeingültigen Ergebnissen ist aber Binet nicht gekommen – mit dem Gesagten stimmt recht gut, was Landau über seine eigenen Versuche im Blindlingsspiel zu erzählen weiß*

{17} Töplitz erzählt von dem *Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung* unter Leitung von Bode, Lipmann und Stern. Es bestehen Unterkomissionen für die verschiedenen Arten spezifischer Begabung, z.B. in Mathematik, zusammengesetzt je aus Fachmännern und einem eigentlichen Psychologen (für Mathematik ausser Töplitz, Blumenthal und Rupp [z.Z. Assistent bei Stumpf]). Soeben ist ein (für sich bereits sehr umfangreiches) Fragment eines allgemeinen Fragebogens ausgegeben worden, das nun in den verschiedenen Unterkomissionen weiter zu prüfen sein wird* Bemerkenswert ist, dass man jetzt mehr die normalen, als die übernormalen Begabungen zu untersuchen strebt, weil man bei ihnen eher hoffen darf, zu zuverlässigen Durchschnittswerten zu gelangen.
Teilfragen, die im Anschluss daran besprochen wurden:

1) {18} Zusammenschau von mathematischer und musikalischer Begabung. Von etwa 40 Anwesenden erklären 18, dass sie Dur und Moll bestimmt unterscheiden können, 15, dass sie es nicht können. 9 sind (nach irgend welcher Richtung) ausübende Musiker.

2) Klein teilt in seinem Evanston Colloquium die Mathematiker in Philosophen, Intuitionisten und Algorithmiker. Was ist von dieser Einteilung zu halten? Was von der Trennung in "Klassiker" und "Romantiker", die Ostwald in seinem Buche über "Grosse Männer" allgemein bei den wissenschaftlichen Forschern vornimmt?

3) Bernstein macht geltend, dass die spätere Arbeit des Forschers nicht nur von seiner Veranlagung, sondern sehr wesentlich von dem Einfluss der Umgebung abhängig sei. Vergl. z.B. die wesentlich arithmetische Haltung der Berliner Mathematischen Schule oder auch zahlreicher italienischer Mathematiker, wo man doch an dem Vorhandensein ursprünglich geometrischer Begabung nicht zweifeln kann.

---

*G.E. Müller underscheidet beim visuellen Gedächtniss zwischen topischem und Formengedächtniss; er sieht die Begabung der Blindlingsspieler als topisch visuell an; die jeweilige Beschränkung auf einen Teil des Schachbretts liege an der Konzentration d. Aufmerksamkeit.

**Zeitschrift für angewandte Psychologie* Bd. III 1909 = Fragment eines psychographischen Schemas.

{19} Sitzung am 24. November 1909.

Bernstein berichtet einiges von den Meumann'schen Untersuchungen. Es wird beim Erlernen z.B. von Zifferreihen geprüft, ob die Veranlagung mehr visuell oder auditiv etc. sei. Freilich stehe dann noch nicht fest, ob das Ergebnis eine Folge verschiedenartiger ursprünglicher Veranlagung oder der Einwirkungen, deren das Individuum ausgesetzt war, sei. Als verbreitetste und auch wohl nützlichste Art der Veranlagung ergebe sich die visuell-motorische**. Die Schule habe einen a.o. Einfluß, solle aber lieber die Einseitigkeiten der Entwickelung abmildern als steigern. Wenn die italienische Mathematik z.Z. durchweg den Charakter grosser Abstraktheit trage, so sei dies eine Folge der historischen Entwickelung der dortigen Gymnasien, bei deren auf den Oberklassen Logik, überhaupt Philosophie älteren Styls etc., andererseits das Arithmetische durchaus verwalteten.
Steckel erzählt von den Beobachtungen, die er bei seinem Unterricht {20} im Osten hinsichtlich des Verhaltens dem mathem. Lehrstoff gegenüber bei Angehörigen verschiedener Rassen (Deutschen, Polen, Juden) gemacht zu haben glaubt. Die Deutschen rechnen $7\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$ in der Form $= 7-\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$, erfassen also die Aufgabe anschaulich; die Juden rechnen $7\frac{1}{4} = 29/4$, also $7\frac{1}{4}-\frac{3}{4} = 26/4 = 6\frac{1}{2}$, beziehen sich also auf die allgemeinen logischen Regeln. Die Polen neigen dazu, nur die Worte der mathem. Regeln zu erfassen, wie sie dann auch im Sprachunterricht exzellieren.
Decoster gibt einige Bemerkungen über Bergson, insbesondere seine Auffassung der Zeit. Die Zeit sei nach Bergson ungleich dem Raume nicht homogen, sondern eine Aufeinanderfolge qualitativ verschiedener psychischer Zustände. Deshalb sei es ganz verkehrt, die Zeit mit dem Zahlbegriff in Verbindung zu bringen. Das Ziel der Psychophysik sei von vornherein verkehrt. Eine Uhr zeige nicht die Differenz zweier Zeiten sondern zweier Orte.

{21} Klein beklagt die grosse Schwierigkeit, die bei Unterhaltungen über den allgemeinen Charakter mathematischer Leistungen darin liegt, dass die einschlägigen mathematischen Disziplinen den Zuhörern durchweg zu wenig bekannt sind. Mit der Aufgabe, von der Eigenart des Lie'schen Genius ein Bild zu geben, wird er sich also in der Weise auseinandersetzen, dass er sich auf eine einzelne besonders charakteristische Leistung (die Linien-Kugeltransformation) beschränkt und hier zunächst gewisse Methoden oder Entwickelungen oder Denkweisen schildert, die Lie entwickelt vorfand. (Das Beispiel von Lie soll dabei zeigen, dass mathematische Produktion mit dem logischen Schliessen aus gegebenen Prämissen unter Umständen ausserordentlich wenig zu tun hat).
1. die Benutzung des sog. Kugelkreises beim Studium irgendwelcher metrischer Beziehungen geometrischer Figuren. — Der Kugelkreis wird definiert, an seine Benutzung beim Schnitt von Kugeln im endlichen, in der Theorie der konfokalen Flächen 2. Grades erinnert. {22} Definition der Dupin'schen Zyklide (mit ihren kreisförmigen Krümmungskurven), der allgemeinen Zykliden (=Fn, die den

**Sehen und Sprechen!

Kugelkreis doppelt enthalten). Es gibt ein (von Darboux und Moutard 1867 entdecktes) Orthagonalsystem aus allgemeinen Zykliden; daher sind die Krümmungskurven der letzteren algebraische Kurven achter Ordnung.
Bei diesen geometrischen Studien beruft man sich vielleicht einmal betreffs logischer Rechtfertigung des Verfahrens auf die allgemeine Berechtigung, mit komplexen Grössen zu hantieren, vielleicht gar auf die Möglichkeit, alle Entwickelungen über komplexe Grössen in v. Staudtscher Weise geometrisch konkret zu denken, aber in Wirklichkeit ist das gedankliche Verfahren ein anderes: man ersetzt zwischendurch den imaginären Kegelschnitt durch einen reellen, raisonniert an diesem, bemerkt dann wieder, dass der Kegelschnitt selbstverständlich imaginär sei, etc. Es ist ein Spiel mit Analogien des Reellen, welches vielmehr durch ein fein ausgebildetes Gefühl kontroliert wird, als durch eine kritische Verstandestätigkeit. Lie nannte eine {23} derartige Methode ein "Schliessen durch die Luft," also ein Fliegen, statt der mühsamen Vorwärtsbewegung an der Erdoberfläche.
Besonders amüsant ist die Betrachtung und Benutzung der geraden Linien, welche den Kugelkreis schneiden: sie haben die Länge Null und stehen auf sich selbst senkrecht (genauer: sie machen mit sich selbst Winkel unbestimmter Grösse). Die Franzosen nennen sie "droites isotropes," weil die Linien $y/x = \pm i$ bei Drehung der XY-Ebene um den Anfangspunkt fest bleiben (sie bilden mit allen anderen durch 0 laufenden Strahlen <u>unendlich grossen</u> Winkel $= \int \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$). Lie gebraucht in seinen späteren Publikationen das Wort "Minimallinien," für sich selbst und ein Privatgespäch nannte er sie die "verrückten Geraden."

{24} <u>Sitzung vom 1. Dez. 1909</u>

<u>Nelson</u> gibt einleitende Bemerkungen über die Probleme der Entstehung der Raumvorstellung, bez. der räumlichen Axiome. Die grossen Meinungsverschiedenheiten scheinen darauf zurückzugehen, dass die fundamentalen Fragen nicht hinreichend deutlich geschieden werden. Man unterscheide:

<u>a. Zeitliches Eintreten der Raumvorstellung in das Bewusstsein.</u>
Wenn die Fähigkeit der Raumvorstellung als a priori gegeben, d.h. als eine dem Menschengeiste ursprüngliche Fähigkeit angesehen wird, so kann sie darum doch durch besondere Anlässe erst ausgelöst werden. So etwa ist z.Z. die Meinung der meisten Psychologen. Dies schliesst nicht aus, dass die Fähigkeit der Raumvorstellung von der Gattung erst erworben ist. (Spencer). Sehr instruktiv die Erfahrungen mit operierten Blindgeborenen. Sie müssen sich die Idee* der Entfernung wie der eigentlichen Gestalt erst aneignen, wozu bei verschiedenen Individuen Stunden oder Tage gehören. Sind die einschlägigen Beobachtungen wirklich so sicher?

{25} <u>b. Die eigentliche Quelle der Raumanschauung.</u>
α. Alter Streit, ob es sich um Anschauung im engeren Sinne handelt, oder um Begriffliches (bei Kant, Lie, Leibniz). Der Streit ist nicht zu entscheiden, so lange alle zu verwendenden Worte schwankende Bedeutung haben.

* "Vorstellung"

Die Psychologen unterscheiden übrigens jetzt allgemein (nach dem Vorgange von E.H.Weber) einen Gesichtsraum, einen Tastraum, einen motorischen Raum als anschauungsmässigen Substrat. Wie aber kombinieren sich die zum "geometrischen Raum?" Sicher spielen Assoziationsempfindungen dabei mit, aber genügen diese zur Erklärung? E.H.Weber unterschied noch einen räumlichen Generalsinn.

β. Hat die Raumvorstellung als solche empirischen Charakter** oder ist sie apriorisch, d.h. eine dem Subjekt eigentümliche ursprüngliche Fähigkeit*? Man bemerke, dass bei aller Empirie eine Schwelle der Genauigkeit vorliegt, {26} dass beobachtete Raumstücke immer nur endlich sind, etc.

Was ist von Lotze's Theorie der Lokalzeichen zu halten, wonach die räumliche Empfindung wesentlich von der Stelle der Reizung abhängig ist?
Gottes Vorstellung des leeren Raumes?

c. Die physiologischen Korrelate.
Cf. spezifische und sukzessive Entwickelung des menschlichen Gehirns. Die Rolle der 3 halbzirkelförmigen Kanäle etc. etc.

In der Debatte berührt Klein, dass nach Poincaré zunächst so viel Dimensionen des Raums unterschieden werden sollen, als Nerven beim Individuum vorhanden sind, dass von da durch Assoziation die Idee* der Bewegungen im Raume entsteht und man dann auf gewisse geometrische Grundbegriffe, z.B. den Begriff Punkt, komme, indem man das Vorhandensein gewisser Vatergruppen von Bewegungen konstatiert. Klein bezeichnet diese und andere Aperçus als {27} mehr geistreich denn als zutreffend. Wie will man auch nur von einer bestimmten Zahl von Nerven sprechen? Bernstein erklärt den Poincaréschen Punktbegriff dahin, dass es natürlich sei, sich den Sitz des eigenen Selbstbewusstseins als einfaches Element zu denken und dieser bei den Drehungen des Kopfes in der Tat ungeändert zu bleiben scheine. Bernstein denkt sich das engere psychologische Problem der Entstehung der Raumvorstellung dahin begränzt, dass er nur von der gegenseitigen Beeinflussung der verschiedenen sinnlichen Apperzeptionen handele, während Nelson betont, dass damit der Kernpunkt der Fragestellung, das Hervorkommen der Raumvorstellung als solcher, überhaupt nicht getroffen sei.

Von der Absicht ausgehend, den Zuhörern die Liesche Entdeckung der Linien-Kugel-Transformation inhaltlich verständlich zu machen, erzählt Klein dieses Mal von den liniengeometrischen Arbeiten der deutschen Schule (Plücker, andererseits {28} Kummer, dann Klein selbst in seinen ersten Arbeiten). Linienkoordinaten p_ik – Lineare Komplexe – Quadratische Komplexe. Die singuläre Fläche eines quadratischen Komplexes = Ort der Punkte, deren Komplexkegel

**cf. Mill und Helmholtz
*cf. Kant
* "Vorstellung"

in 2 Ebenen zerfällt, ist eine Kummer'sche Fläche 4. Ordnung und Klasse, mit 16 "Doppelpunkten" und 16 "Doppelebenen." Die einzelne Kummer'sche Fläche ist singuläre Fläche für ∞' quadratische Komplexe, unter denen sich doppelzählend 6 lineare Komplexe befinden. Sie erscheint daher auch als Brennfläche von 6 in diesen linearen Komplexen enthaltenen Kongruenzen (1,2).

Vorzeigung zahlreicher Modelle von Kummer'schen Flächen (die sog. Plücker'sche Komplexfläche ist eine Ausartung, bei der eine Doppelgerade auftritt).
Überall muß man, um Übersicht zu wahren, projektive Denkweise anwenden. Daher ist es natürlich, nicht etwa nach den Krümmungskurven der Kummer'schen Fläche zu fragen, sondern nach ihren Haupttangentenkurven. Einige Angaben über deren Verlauf.

{29} Sitzung vom 8. Dez. 1909.

Uffrecht spricht über das Buch von König : *Kant und die Naturwissenschaften.* Ihm scheinen die Grundlagen dort so wenig klar, dass er vorläufig ablehnen muss, endgültig darüber zu berichten.
Klein setzt sein Referat über Lie fort. Die Leistung von Lie, von der hier gehandelt werden soll, ist die Verbindung des französischen Ideenkreises betr. Benutzung des Kugelkreises für metrische Fragen und der deutschen Liniengeometrie durch die Berührungstransformation, welche gerade Linien und Kugeln zusammenordnet (Paris 1870).
Die allgemeinen Ideen, wie sie sich Lie später darstellten, lassen sich durch die Stichworte bezeichnen:
Begriff des "Elements" $(x\,y\,z\,p\,q)$. "Vereinigte Lage" zweier benachbarter Elemente: $dz - p\,dt - q\,dy = 0$. Punkt, Kurve, Fläche als Spezialfälle der "Vereine" von ∞^2 Elementen. {30} "Berührungstransformation" = Elemententransformation, welche Vereine in Vereine überführt. Ausgedrückt je nachdem durch eine "aequatio directrix," oder durch zwei, oder drei.
Die analytischen Formeln bez. Theoreme, durch welche diese Ideen exakt formuliert werden, sind im Grunde alle bereits in den alten Untersuchungen von Lagrange u.a. bis hin zu Jakobi über kanonische Substitutionen in der theoretischen Mechanik (der astronomischen Störungstheorie) enthalten. Indem aber Lie diese Ideen auf geometrische Weise wiederfand, gewannen sie bei ihm triebkräftiges Leben.
Die Linien-Kugeltransformation, auf die es schliesslich ankommt, ist an sich durch sehr einfache Formeln gegeben. Man definiere die Gerade mit Plücker durch die Gleichungen $x = rz + \rho$, $y = sz + \sigma$, die Kugel durch $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$. Es genügt dann zu setzen:

$$r = \alpha + i\beta,\ \sigma = \alpha - i\beta,\ s = \gamma + R,\ \rho = -\gamma + R\ .$$

Die tief eingreifende geometrische Bedeutung dieser Transfor{31}mation liegt darin, dass sie imaginär ist. Was kann der naïven Anschauung, fragt Darboux, unähnlicher scheinen, als die Gesamtheit der Elemente, die sich an eine Gerade,

und die Gesamtheit der Elemente, die sich an eine Kugel anschmiegt? Und doch sind sie vom Standpunkte einer allgemeinen Elemententheorie, die alle Variablen komplexer Wertesysteme fähig nimmt, gleichwertig.
Dies will, wenn man das Ding wirklich verstehen will, ins einzelne überlegt sein. Was entspricht den "Elementen" einer Geraden, die denselben Punkt oder die dieselbe Ebene enthalten? Die Kugel enthält zwei Schaaren von Minimallinien als Erzeugende und jenen Elementen entsprechen diejenigen Berührungselemente der Kugel, die sich längs einer Erzeugenden der einen oder anderen Schaar an einander reihen. Was entspricht den Elementen, welche die Kugel in den Punkten eines Kreises berühren? Bei der Geraden ein solcher Elementen{32}streifen, bei dem die Punkte und die Ebenen der Elemente irgendwie durch eine projektive Zuordnung verknüpft sind.
Man arbeitet, indem man solche Sätze aufstellt und sie dann weiterhin selbst wieder zur Ableitung neuer Wahrheiten benutzt, sozusagen in einem Mittelgebiet zwischen Anschauung und Begriff.
(Fortsetzung folgt).

[Elementare Entwickelungen betr. die Linien-Kugeltransformation in der Ausarbeitung meiner Vorlesung über Kurven und Flächen vom Sommer 1907]. [Aber das Beste, die Zusammenhänge im Imaginären, habe ich damals in Anbetracht der Anlage meines Kollegs und der Zusammensetzung meiner Zuhörerschaft nicht auseinandersetzen können].

{33} Sitzung vom 15. Dez. 1909.

Errera beginnt sein Referat über die Untersuchungen der Physiologen betr. das Zustandekommen bez. die Sicherheit der Raumanschauung mit besonderer Zugrundelegung von Nagel, *Handbuch der Physiologie des Menschen*, Bd. III (Vieweg 1905):
Versuche von Delage u.a. betreffend die Lage im Raum, die Bewegung, den Widerstand. Bei veränderter Lage behält man ein leidliches Gefühl für die Vertikalrichtung, doch ist dasselbe stark durch die Haltung des Kopfes beeinflusst. Nach Mach empfindet man gleichförmige Translation überhaupt nicht; bei irgendwelcher beschleunigter Bewegung (also auch bei gleichförmiger Drehung) stellt sich der Vertikalsinn in die Resultante von Schwere und Beschleunigung (Zentrifugalkraft). Vertikal- und Horizontalkreuz bei nach rechts geneigtem Kopf (und geschlossenen Augen) = X
Theoretische Folgerungen: Neben der diffusen Empfindung der inneren Organe scheint für die räumliche Orientierung hauptsächlich die Empfindung im Ohrlabyrinth in Betracht zu kommen. Schwindelgefühl (Drehschwindel, im Gegensatz zu Höheschwindel) scheint aus Konflikt der verschiedenen zusammenwirkenden Sinnes{34}eindrücke hervorzukommen. Vergl. Experimente mit einem schwingenden Spiegel, der so gross ist, dass er das Gesichtsfeld fast ausfüllt (während der Beobachter ruht). Nur ganz wenige Personen werden dabei nicht schwindelig, wohl aber ein grosser Prozentsatz von Taubstummen (bei denen man eine Verkümmerung des Ohrlabyrinths voraussetzen kann).

(Fortsetzung folgt).

Klein beendet seine Vorträge über Lie.
Das Schöne bei der Linien-Kugeltransformation ist, dass sie nicht gleichgültige Ergebnisse liefert, sondern die wesentlichen Probleme der metrischen (französischen) Geometrie mit diejenigen der (deutschen) Liniengeometrie in Verbindung bringt. Zunächst bekannte Dinge — hier und dort die doppelte Erzeugung des Hyperboloids durch gerade Linien mit der doppelten Umhüllung der Dupin'schen Zyklide durch Kugeln. Die Kummer'sche Fläche als Brennfläche der Kongruenz (2,2) des Linienraums mit der allgemeinen Zyklide. Nun aber {35} Neues (bis dahin Unbekanntes). Indem man die Krummungskurven der allgemeinen Zyklide als algebraische Kurven 8. Ordnung kennt, ergeben sich die Haupttangentenkurven der Kummer'schen Fläche als algebraische Kurven 16$^{\text{ter}}$ Ordnung!
[Vom Punktstandpunkte stellt sich die Lie'sche Transformation so dar, dass jedem Punkte des Kugelraumes eine Grade des linearen Komplexes $s + \rho = 0$ entspricht, jedem Punkte des Linienraums eine Minimalgerade. Eine bestimmte Gerade des Linienraums ist bei der Abbildung singulär {es entsprechen ihr die sämmtlichen ∞-fernen Punkte des Kugelraums}, ebenso im Kegelschnitt des Kugelraums, nämlich der "Kugelkreis."]
Wie hat nun Lie diese Theorien gefunden? Das ist die psychologische Frage, die hier interessiert. Folgende äussere Daten:

1. Jugend auf dem Lande, normales Universitätsstudium in Christiania.

2. Mehrere Jahre ohne rechte Beschäftigung als Privatlehrer. Unterrichtliche Elementarinteressen. Daneben allerlei Wunderlichkeiten. Exzessive Wanderungen. Körperliche Kraftleistungen.

3. {36} Mit 25 Jahren zufälliges Bekanntwerden mit den geometrischen Schriften von Plücker und Poncelet. Entschluss, selbst geometrisch zu arbeiten, und starke Ueberzeugung, dass dies gelingen müsse.

4. Erster Versuch mit einer an sich trivialen Fragestellung: Deutung des Imaginären der Plangeometrie, indem für $x = \xi + iy$, $y = \zeta + i\tau$ im Raumpunkt ξ, y, ζ mit dem "Gewichte" τ gesetzt wird. Hierbei entstehen allerlei interessante Beziehungen u.a. die Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum, innerhalb denen ein Fundamentalkegelschnitt liegt. (Diese Abbildung kurz vorher von Nöther in den G.N. publiziert).

5. Nun greift der Zufall (der Einfluss des Milieus ein), indem Lie mit Stipendium für den Winter 1869/70 nach Berlin kommt und dort durch Klein die deutsche Liniengeometrie kennen lernt.

6. Entsprechender Zufall, dass Lie mit Klein für den Sommer 1870 nach Paris geht, wo der Kugelkreis und die sich anschliessenden Probleme an der Tagesordnung {37} sind.

7. Wie kommt nun Lie darauf, jenen Fundamentalkegelschnitt, der bei Abbildung des linearen Komplexes entsteht, in den Kugelkreis zu verlegen und sich für Wochen und Monate unablässig in die dadurch entstehenden Beziehungen zu vertiefen? "Der gute Mensch in seinem dunklen Drange ist sich des rechten Weges stets bewusst." (Lie sagte später: ich habe lange Zeit in den beiden Räumen neben einander "gelebt").

8. Eines Morgens früh 7 Uhr ruft Lie mich in sein Zimmer (wo er noch im Bett lag) und erzählt mir in aufgeregter aber mir trotz aller Uebung völlig unverständlicher Weise, dass Krümmungskurven in Haupttangentenkurven übergehen und dass die H.K. der Kummerschen Fläche dabei als algebraische Kurven 16. Ordnung herauskommen.

9. Ich verstand das weder, noch glaubte ich es, bemerkte aber unter Tags, dass die H.K. der Kummer'schen Fläche mit Kurven 16^{ter} Ordnung zusammenfallen, die ich schon von meinen liniengeometrischen Untersuchungen {38} kannte und deren Attribute : Klasse, Rang, Singularitäten, Verlauf im Reellen ich genau bestimmen konnte. Als ich Lie am Abend davon erzählte, antwortete er gereizt: ich habe doch erzählt, dass es Kurven 16^{ter} Ordnung sind. Er war also trotz der Ungeordnetheit seiner Darlegungen von deren innern Richtigkeit völlig überzeugt gewesen.

10. Wir sehen hier nicht etwa bestimmten Plan der Arbeit mit vorweg festgelegtem Ziel. Auch tritt alles Verstandesmässige stark zurück : Lie hatte relativ geringe Kenntnisse und ganz und gar nicht, wie man es heute postuliert, exakte Grundbegriffe, er operierte auch nicht etwa analytisch. Starker innerer Trieb zur Produktion innerhalb der durch das Milieu gegebenen Möglichkeiten, bez. Anregungen! Es ist, wie bei jeder anderen Produktion: "Der Wind bläset, wo er will, und du hörest sein Sausen wohl; aber du weisst nicht, von wannen er kommt und wohin er fährt. Also ist ein Jeglicher, der aus dem Geiste geboren ist."

{39} Sitzung vom 22. Dez. 09.

Errera beendet sein Referat über die physiologischen Korrelate der Raumanschauung:
Beschreibung des Ohrlabyrinths: Die 3 Bogengänge liegen nahezu in 3 zueinander rechtwinkeligen Ebenen (der eine in horizontaler Ebene, die beiden anderen gegen die sagittale Richtung um 45° geneigt). Endolymphe im Inneren, Sinneshaare, an ihren Spitzen kleine Kalkkörperchen.
Die Bedeutung der Bogengänge wurde 1828 von Flaurens (Paris) entdeckt, 1870 von Goltz (Strassburg) wieder aufgenommen = Gleichgewichtsorgan, 1892 Ewald (ebenfalls Strassburg).
Erfahrungen an Tauben und Fröschen, deren Bogengänge zerstört wurden. Merkwürdige Drehungen und Pendelbewegungen. Ebenso an Krebsen, denen

man aus ihrem rudimentären, von aussen zugänglichen Ersatzorgan die kleinen Steinchen entfernte.
Theorie von Mach und Breuer, wonach der Stoss der Endolymphe auf die mit den Otolithen beschwerten Sinneshaare das Entscheidende sein soll.

{40} Cyon hat die Versuche weitergeführt, zugleich aber die Theorie ins Phantastische ausgesponnen. Die Bogengänge sind nach ihm das Organ der Euklidischen Geometrie, die Schnecke das Organ der Zahl, aus dem Zusammenwirken der beiden die Aufformung der Zeit !
Schliesslich sind die Bogengänge doch nur eines der Organe, die in uns die Raumvorstellung auslösen, bez. näher fixieren. Die Augen und Augenmuskeln (Hering in Hermann's Physiologie), das Gehör und natürlich Tast- und Bewegungsempfindungen kommen daneben in Betracht. Die Ansicht der modernen Physiologen geht überwiegend dahin, dass diese verschiedenen Sinneswahrnehmungen im Kleinhirn zur Raumvorstellung verarbeitet werden.
[Prof. Bernstein berichtet über die merkwürdige Beobachtung von Urbantschitsch in Wien, dass Einspritzungen in das Labyrinth Orientierungsänderungen im Sehefeld hervorrufen können.]

{41} Sitzung vom 19. Januar 10.

Bernstein berichtet über den Entwickelungsgang und die Eigenart von Georg Cantor. Cantor bezeichnet sich selbst im Gegensatz zu Dedekind, den er als typischen Logiker ansieht, als Intuitionisten. Er glaubt an die Objektivität der mathematischen Dinge und fühlt sich ihnen gegenüber also nicht als Erfinder sondern als Entdecker. Seine neuen Ideen sind immer aus der Beschäftigung mit konkreten Problemen entstanden : die Frage der Abzählbarkeit von Mengen aus der Untersuchung des identischen Verschwindens der trigonometrischen Reihen, die transfiniten Zahlen bei der Betrachtung der successiven Ableitungen einer irgend gegebenen Punktmenge. Auf der einen Seite die rückhaltlose Bewunderung der mathematischen Möglichkeiten (Cantor vergleicht eine "Menge" mit einem Abgrund, Dedekind mit dem Inhalt eines Sacks), auf der anderen Seite aber volle Klarheit der Begriffe und eine starke Gabe des Systematisierens. Die al{42}gorithmische Mathematik liegt ihm ganz fern. Von hier z.B. starke Abneigung gegen Peano. Und auch du Bois, mit dem er in früheren Jahren viel wissenschaftlich verkehrte, war ihm wegen der Unbestimmtheit seiner Auffassungen unsympatisch. - In philosophischer Hinsicht bezeichnet sich C. gern als Leibnizianer. Aber auch die Scholastiker mit ihrem systematischen Begriffsaufbau hat er eifrigst studiert. Weitgehendes Interesse für alle literarisch-historische Fragen, sehr viel geringeres für das Naturwissenschaftliche, Teatrische.

{43} Sitzung vom 26. Januar 1910.

Steckel berichtet über Branford, *A Study of mathematical education and the teaching of arithmetic,* Oxford 1908, und Mair, *A School course of Mathematics,* Oxford 1907. (die beiden Bücher stehen in Abhängigkeit. Branfords Buch ist aus Vorträgen entstanden, in denen er mehr allgemeine Gesichtspunkte gab; das

Buch von Mair versucht eine lehrplanmässige Ausgestaltung. Dabei ist aber nicht etwa an eine organisierte Schule, wie unsere Volksschule gedacht, sondern an den Unterricht eines einzelnen Kindes, bei dem man so lange bei dem einzelnen Gegenstande verweilen kann, bis das Kind ihn wirklich verstanden hat).
Die Grundauffassung bei Branford ist, dass das Kind mehr oder minder dieselben Stufen der Erkenntniß zu durchlaufen habe, die das menschliche Geschlecht tatsächlich in seiner Entwickelung durchlaufen hat (Biogenetisches Grundgesetz). Er unterscheidet dabei die "empirische," die "systematische" und die "ästhetische Stufe." Allemal wird nicht mit Grundsätzen begonnen, die dem Kinde von aussen eingeprägt werden, sondern mit Problemen, die er von sich aus löst. Diese Probleme knüpfen immer an den beim {44} Kinde ohnehin vorhandenen Vorstellungsinhalten.
Z.B. Beginn der Geometrie : welche Marken muß ich mir auf einem Hofe machen, um die Stelle, an der ich einen Schatz vergraben habe, wiederzufinden?
Satz vom Peripheriewinkel im Kreise : Gefahrwinkel bei 2 Leuchttürmen (der Lage erhöhter Klippen entsprechend).
Beginn der Kombinatorik : Signalisieren durch Morsezeichen.
Dieses System des Unterrichts wird von den Erfahrungen getragen, welche Versuche mit heranwachsenden Kindern tatsächlich ergeben haben. Es zeigte sich, dass die Fähigkeit, abstrakte Formulierungen aufzufassen oder auch nur gelten zulassen, sehr viel geringer ist, als der Erwachsene vermutet. Z.B. wird zugegeben, dass zwei Strecken, welche gleich viel Zentimeter lang sind, sich zu decken vermögen, während der Satz, dass zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, auch unter einander gleich sind, auf Ablehnung stösst. –
Nelson bemerkt, dass bei dem Elementarunterricht, den die Studierenden in Charlottenburg u. anderwärts jetzt für Arbeiter in Rechnen und Raumlehre erteilen, sich spontan, {45} also ohne Kenntniß der bereits vorliegenden Literatur, sich ähnliche Erfahrungen und Ansätze entwickelt haben.*
Bernstein bemerkt, dass die ersten zusammenhängenden math. Volkshochschulkurse wohl 1829 von Dupin in Paris gehalten worden sind, im Anschluss an eine Reise nach England, bei der D. die dortigen Arbeiterverhältnisse studierte.**
Klein erzählt von einer charakt. Erfahrung, die Brill z.Z. gemacht hat, als er zu Anfang seiner wissenschaftlichen Karriere in Berlin an einer Handwerkschule über die Kongruenzsätze vortrug. Ein Schüler antwortete ihm : Dreiecke sind doch immer kongruent! Er kannte als Dreiecke nur die käuflichen Holzstücke, die man beim Zeichnen an seiner Schule für die geometrischen Konstruktionen anwendete.

Als Vorbereitung zu weiteren Vorträgen über mathematische Pädagogik stellt Klein folgendes Entwickelungsschema auf:{46}

---

*

**Näheres in Poggendorffs Lexikon

1. Die überkommene scholastische Pädagogik, welche die Kinder die Sätze eines systematischen Lehrbuchs, z.B. des Euklid, der Reihe nach lernen lässt.

2. Pestalozzis Grundgedanken, dass jeder naturgemässe Anfangsunterricht an die Kindliche "Anschauung" anzuknüpfen habe, systematisiert von Herbart und von dessen Schülern, wie Ziller (Leipzig), Story (Jena), etc. in den Einzelheiten ausgearbeitet. Der Ausgangspunkt ist, was Herbart "Psychologie" nannte. Das Herbart'sche System herrscht noch durchweg an den Volksschulen, bez. bei der Mehrzahl der Volksschulpädagogen. Hierüber wird vorzutragen sein.

3. Die "neue Schule" der beobachtenden und experimentierenden Pädagogik (bez. Psychologie).

   Gesellschaften : für experimentelle Psychologie, Vorsitzender G.E. Müller. Bis jetzt Kongresse Giessen 1904, Würzburg 1906, Frankfurt 1908, demnächst 1910 Innsbruck.

   Einmaliger Kongress Berlin 1906 für Jugendforschung {47} und Jugendfürsorge (1906). Jahresbericht Langensalza 1907.

Institut für angewandte Psychologie und psychologische Sammelforschung, von Bode, Lipmann und Stern (Neubabelsberg).
Experiment. Institut von Brahn in Leipzig, begründet und unterhalten vom sächsischen Lehrerverein.

Zeitschrift für experimentelle Pädagogik von Meumann (Münster, jetzt Halle).
Zeitschrift für pädagogische Psychologie, von Brahn, Deuchert etc.

Lehrbücher. Neben Meumann ( ) stellt sich z.B. Rud. Schultze. Aus der Werkstatt der experimentellen Psychologie und Pädagogik. Leipzig 1909.

Alles dieses bezieht sich nur auf das Auftreten der "neuen Schule" in Deutschland. Der deutsche Lehrerverein (Vorsitzender Lehrer Rühl in Berlin) hat neuerdings eine Pädagogische Zentralstelle eingerichtet (Vorsitzender Fortbildungsschuldirektor Haumann in Berlin) und diese hat in ihrer Sitzung vom 29. Dez. 1909 den von Dr. Brahn entwickelten Plan einer {48} "pädagogischen Akademie" entschlossen, d.h. einer gesonderten, mit einer grösseren Zahl von Lehrkräften besetzten Anstalt, in welcher die gesammten Fragen der modernen Pädagogik so lange eine systematische Vertretung finden sollen, als diese an den Universitäten nicht genügende Vertretung finden.

{49} <u>Sitzung vom 2. Febr. 1910.</u>

<u>Behrens</u> berichtet über <u>Meumann</u>, experimentelle Pädagogik (2 Bände).

Die experimentelle Pädagogik ist eine Wissenschaft, die sich erst in ihren Anfängen befindet; man muss zufrieden sein, vorläufige Formulierungen zu finden, die noch keineswegs zur praktischen Nutzanwendung ausreichen.
Meumann behandelt u.a. die allgemeine Frage, wie man die Begabung eines normalen Kindes charakterisieren könne. Die Genauigkeit der Empfindungen erscheint ihm ziemlich gleichgültig, wichtiger schon die Stärke des Gedächtnisses. Er richtet sein Interesse durchaus auf den Intellekt (hinter dem ihm der Willen, überhaupt die ethischen Qualitäten zurückstehen). Hier unterscheidet er dann Typen

a) der Anschauung, ob beschreibend (die Einzelheiten erfassend) oder beobachtend (umfassend),

b) der Aufmerksamkeit, ob fixierend (intensiv aber eng) oder fluktuierend

c) der Vorstellung. Man kann Sachvorstellungen und Wortvorstellungen unterscheiden, andererseits die Attribute visuell, {50} auditiv und motorisch. Sachvorstellungen sind wesentlich visuell, Wortvorstellungen mehr auditiv, bez. motorisch.

Im Kindesalter erscheinen diese Typen noch beeinflussbar, später sind sie fixiert. Im Kindesalter prävalieren die Sachvorstellungen, beim Erwachsenen die Wortvorstellungen.
[Klein vergleicht die beiden Vorstellungsarten mit dem Verfahren der synthetischen und der analytischen Geometrie. Er selbst folgt der méthode mixte, d.h. er hat fortgesezt die geometrischen Figuren vor Augen, aber bedient sich für die Schlüsse der Analysis].
Meumann bespricht des ferneren besondere Gebiete des Unterrichts:

a. Anschauungsunterricht, auf Grund von Demonstration und Aussageexperiment. Bis zum 8^{ten} Lebenjahre herrscht das "Substanzstadium," vom 8^{ten} zum 9^{ten} das "Aktionsstadium" (wie wirken die angeschauten Dinge auf einander?), vom 9^{ten} bis 11^{ten} das "Relativstadium" und von da ab das "Qualitätsstadium."

b. {51} Lesenlernen. Gegenstand, bez. Wortbild sollen mit bestimmtem Schriftbild assoziiert werden. Man unterscheidet 1) die synthetische Unterrichtmethode, welche die Worte aus den Buchstaben zusammensetzt, 2) die analytische, die das Wort in Lautkomplexe zergliedert und für diese Schriftzeichen einführt. Nr. 1 kann buchstabierend gehandelt werden (K = "Ka") oder lautierend (K = K'). Diese Lautierenmethode ist jetzt beim Anfangsunterricht wohl allgemein üblich. Nr. 2 charakterisiert die Art, wie der Erwachsene tatsächlich liest, ist aber für den Anfang zu ungenau. Cf. 'ei'.

   Von der Augenbewegung beim Lesen, von der Bedeutung des indirekten Sehens etc.

c. Schreibenlernen. Zuerst eine “künstliche” Handschrift, später eine “natürliche,” die mehr vom Verlaufe der Gehirnprozesse als von der schreibenden Hand abhängig scheint. Bei letzterer fliessen die einzelnen Buchstaben in einander.

Vom zeitlichen Verlauf des Drucks beim Schreiben (graphisch dargestellt).{52}

d) Einprägen der Zahlen. Soll es graphisch geschehen durch Nebeneinanderstellen identischer Zeichen, z.B. ///, oder durch Auszählen, mit Fixierung der Stelle durch die Ziffer (z.B. 3)? Das entspricht sozusagen der Unterscheidung von Kardinalzahl und Ordinalzahl. Grössere Zahlen werden am besten durch quadratische Schemata erfasst:

0	0 0	0 0	0 0	0 0 0	...
		0	0 0	0 0	

Übrigens tritt das verständnisvolle Erfassen der Zahlen erst relativ spät ein, das Kind hat neben den auswendig gelernten Worten zunächst nur das unbestimmte Gefühl der Vielheit.

e. Zeichnen (mit dem Stift). Woher gibt es so sehr viele schlechte Zeichner (zunächst bei Zeichnen aus der Erinnerung)? Verschiedene Gründe können in Betracht kommen: Ungenaues Sehen, ungenaue Reproduktion des Gesehenen in der Vorstellung, Ungeschicklichkeit der Hand schlichtweg (man lasse Kreise oder gerade Linien zeichnen), ungenaue {53} Assoziation zwischen der Vorstellung und der Tätigkeit der Hand.

Man sieht, dass die soweit gewonnenen Grundlagen noch keineswegs für die Aufstellung einer bestimmten (ev. dem Individuum angepassten) Methodik des Rechenunterrichts oder des Unterrichts in der Raumlehre ausreichen. Als Ziel aber müssen wir festhalten, dass alle Aufgaben des mathematischen Unterrichts bis hin zum Hochschulunterricht experimentell pädagogisch durchgearbeitet werden!

{54} Sitzung vom 9$^{\text{ten}}$ Febr. 1910.

Freundlich berichtet über Pestalozzi's A.B.C. der Anschauung und Herbarts zugehörige Schrift: Pestalozzis Idee untersucht und wissenschaftlich ausgeführt (1802).
Pestalozzi lässt das Zerlegen von Strecken und Quadraten in kongruente Teilstrecken resp. Teilquadrate auf alle Weisen bis zur Uebermüdung ausführen. Herbart setzt an Stelle des Quadrats als Grundfigur aller geometrischen Anschauung das Dreieck. Es komme darauf an, alle möglichen Gestalten von Dreiecken begrifflich zu erfassen und alle anderen Figuren durch Zusammenstellung geeigneter Dreiecke sich klar zu machen.

Daher zuerst Konstruktion rechtwinkeliger Dreiecke mit Winkeln von 5°, 10°, 15°, etc. Ablesung ihrer Seitenlängen an Hornplättchen. Zusammensetzung allgemeiner Dreiecke aus diesen Grunddreiecken.
Die Kinder haben die Maassverhältnisse, die so gewonnen werden, sich gedächtnißmässig einzuprägen. Aber es ist gut, wenn sie so früh wie möglich schon sich die Figuren aeusserlich einprägen. Man soll ihnen schon in der Wiege die Grunddreiecke und anderes vor die Augen stellen.
{55} Der Unterricht in Geographie und Astronomie geht später darauf hinaus, auf der Erd- oder Himmelskarte die Hauptpunkte durch Dreiecke zu verbinden und diese Dreiecke je an die richtige Stelle der vorher gewonnenen Dreieckstabelle zu rubrizieren!
Wie haben nun diese Ideen Herbarts im Rahmen seiner allgemeinen psychologisch-pädagogischen Ideen an den Volksschulen nachgewirkt? Es ist das darum so schwer zu erkennen, weil die methodischen Darstellungen der Enzyklopädien die Fragen des mathematischen Unterrichts höchstens ganz beiläufig erwähnen.

Klein bringt einen neuerlichen Aufsatz von Th. Lessing zur Sprache, in welchem dieser den Unterschied des abstrakt mathematischen und des spezifisch naturwissenschaftlichen (intuitiven) Denkens urgiert und für eine reinliche Scheidung der beiden Gedankensphären einzutreten scheint. Dann würden also Leistungen, wie sie Helmholtz vollzogen hat, – oder auch Archimedes, Newton, Gauß, (um nur die grössten zu nennen) – zur seite {56} geschoben sein. Wir anderen haben immer geglaubt, dass ein wesentlicher Teil der Kulturmission der Mathematik darin liege, das von aussen herankommende Material denkend zu verarbeiten, - dass die Mathematik selbst von da aus die wirksamsten Impulse erhalte. Jedenfalls kann die Mathematik nur im Bunde mit dieser Auffassung an der Schule wie der Hochschule ihre weitreichende Geltung festhalten, und es ist nicht zu verstehen, dass ein Dozent der Philosophie und Pädagogik an einer technischen Hochschule die umgekehrte Taktik empfielt. Wenn Lessing in dem Verhalten Kleins den praktischen Fragen gegenüber und dem Umstande, dass Klein über Nichteuklidische Geometrie gearbeitet hat, einen Widerspruch findet, so kann man nur annehmen, dass er die Arbeiten Kleins über Nichteuklidische Geometrie nicht gelesen hat. Besagte Arbeiten laufen in der Tat darauf hinaus, die Nichteuklidische Geometrie als etwas Einfaches und Anschauliches zu erfassen, sie zu einer bequemen Methode bei allgemeinen mathematischen Auffassungen auszubilden. Uebrigens nimmt Lessing die eigentliche, abstrakte Mathematik insbesondere für das Judentum in Anspruch.
{57} Der Unterschied und die Wechselbeziehung zwischen mathematischem und naturwissenschaftlichem Denken ist nicht mit wenigen Sätzen festzulegen. Klein verweist dieserhalb insbesondere auf seine autographierte Vorlesung von 1901 : Anwendung der Diff. u. Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien (nämlich besagter Anwendung).

Noch sei bemerkt, dass die Unterrichtskomission der Ges. Deutscher Naturforscher und Aerzte in ihrem abschliessenden Bericht (1907) widerrät, beim Universitätsstudium Mathematik und sämmtliche Naturwissenschaften zu kombinieren. Sie empfielt vielmehr zwei getrennte Kombinationen:

a. Mathematik mit Physik, mit etwas Chemie,

b. Chemie und Biologie, mit etwas Physik.

{58} Sitzung vom 16. Februar 1910.
Klein erstattet einen vorläufigen Bericht über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Methodik des Unterrichts in Rechnen und Raumlehre an den Deutschen Volksschulen (vergl. die Lehrbücher von Rude, 1904, und von Gehrig, 1906); Hr. Freundlich wird darauf demnächst ausführlicher zurückkommen. Das Merkwürdige ist, dass mit dem Betriebe an den höheren Schulen auch da, wo es stofflich geboten wäre, gar kein Zusammenhang zu bestehen scheint. Umgekehrt weiß auch Höfler in seiner Didaktik des math. Unterrichts (1909) gar nichts von der methodischen Literatur der Volksschulen. Natürlich sind auch die Lehrbücher, aus denen die Volksschullehrer ihre Kenntniß der Elementarmathematik schöpfen, ganz anders als die, die wir kennen. In erster Linie stehen Burkhard's Unterrichtsbrief (Gera), das ausführliche Lehrbuch der Elementarmathematik von Lübsen (Leipzig) und die Enzyklopädie {59} der gesammten mathematischen Wissenschaften von Kleyer (Stuttgart, bez. Bremerhaven). Das auffälligste ist, dass diese Werke alle ausserordentlich teuer sind. Z.B. kosten die für den Selbstunterricht in Arithmetik und Algebra bestimmten Kleyer'schen Hefte insgesamt 60 M!
Bernstein entwickelt Ideen über eine psychologische Untersuchung verschiedener Typen von Mathematikern. Der Stoff, über den der einzelne Mathematiker arbeitet, sei weniger durch die Art seiner Begabung als durch den Bildungsgang und die allgemeine Zeitrichtung bestimmt. Sehr wichtig sei – in der Mathematik wie in allen geistigen Gebieten – die Unterscheidung zwischen konstruierenden Naturen (vergl. Schiller, Kant, Plato) und beobachtend-kombinierenden (cf. Goethe, Hegel, Aristoteles). Bei Mathematikern der ersten Art sei vielleicht $\frac{3}{4}$ Logik und $\frac{1}{4}$ Phantasie vorhanden, bei denen der anderen Art $\frac{1}{4}$ Logik und $\frac{3}{4}$ Phantasie. Aber diese Unterscheidung durchkreuzt sich mit Gegensätzen anderer Art, cf. Systematiker und Aphoristiker, sukzessives Vorgehen {60} und intuitives, Einseitigkeit und Vielseitigkeit, Deduktion und Empirie. Diese Bemerkungen wollen nur erste Ansätze zur Bearbeitung eines wichtigen Gebietes sein. Erst wenn man da klar sähe, könne man hoffen, wirkliche Mathematiker-Biographien zu schreiben.

{61} Sitzung vom 23. Febr. 1910.

Freundlich berichtet über die wesentlichen Züge der auf Herbart zurückgehenden und von Ziller in bestimmte Formen gebrachten an unseren Volksschulen herrschenden Unterrichtsmethodik (siehe Ziller 1876: Vorlesungen über allgemeine Pädagogik, Leipzig, siehe auch z.B. Matzat: Methodik des geographischen

Unterrichts, Berlin 1883, wo Volksschulen und höhere Schulen neben einander betrachtet werden).
Vorausgeschickt muß werden, dass das Prinzip der "Lückenlosigkeit," welches Pestalozzi in seinem A.B.C. der Anschauung aufstellte, und dem sich Herbart damals mit seiner Aufzählung der "Normaldreiecke" anschloss, gänzlich verlassen ist.
Charakteristisch ist vielmehr eine Gliederung des Unterrichts in allen Fächern nach gewissen Stufen (Formalstufen), die Herbart bez. Ziller auf systematische Psychologie stützen:

I. Erwerbung der Kenntniße.
   1. Gewinnung von Einzelvorstellungen
      a. "Analyse" der bereits vorhandenen E.
      b. Erfassung neuer E. durch "Synthese"{62}
   2. Verarbeitung der Einzelvorstellungen
      a. Bildung von Begriffen (Assoziation)
      b. Ausscheidung des Unwesentlichen (System)

II. Anwendung der Kenntniße (womit der erziehliche Zweck des Unterrichts, oder, wie Herbart sagt, sein ethischer Zweck, der eine Willensrichtung einschliesst, erreicht wird).

Dabei soll sich der Unterricht um gewisse Mittelpunkte (Konzentrationsstoffe) gruppieren.
Wie ist das nun in den einzelnen Fächern, insbesondere für Rechnen und Raumlehre, durchgeführt?
Wie weit sind in den letzten Jahren neue Tendenzen hervorgetreten? (Cf. moderner Zeichenunterricht, – cf. das Prinzip der Selbsttätigkeit)?
Was bedeutet experimentelle Psychologie und physiologische Psychologie?
Hat die Volksschulmethodik auf die neueren Unterrichtstendenzen an den höheren Schulen eingewirkt?
{63} Nelson gibt einige Erörterungen über die Einordnung der Mathematik in das System der Wissenschaften. Unterscheidet man

Gegenstand   Methodik   Erkenntnißquelle,

so sind alle Autoren vor Kant darin einig, für die Mathematik anzugeben:

Lehre von den Grössen   syllogistisch   blosses Denken (Logik).

Kant setzt statt dessen

Raum und Zeit (wobei das Verhältnis von Zahl und Zeit unklar bleibt)	dogmatisch	reine Anschauung = Konstruktion der Begriffe, also ein drittes neben Denken und Empirie.

Im 19^{ten} Jahrhundert wogt im wesentlichen der Streit, ob die mathematische Erkenntniß der Logik oder der Erfahrung entstammt. Die Nichteuklidische Geometrie lässt Vielen die Geometrie geradezu als Naturwissenschaft erscheinen. Stuart Mill und Mach sehen auch als Grundlage der Arithmetik die Erfahrung an.

{64} Sitzung vom 2. März 1910.
Fortsetzung der Unterhaltung über die Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften:

1. In der *Kultur der Gegenwart*, Herausgeber Hinneberg sind die ersten beiden Teile den "Geisteswissenschaften" gewidmet, dann folgt ein Teil für Mathematik, Naturwissenschaft und Medizin, endlich ein Teil für die technischen Kulturgebiete. Diese Einteilung ist nicht als das Resultat systematischer Ueberlegung, sondern als blosser Reflex der an den Deutschen Hochschulen tatsächlich herrschenden Verhältnisse anzusehen.

2. In dem für die wissenschaftlichen Kongresse bei der Weltausstellung in Saint Louis (1904) ausgegebenen Programm, das von Münsterberg herrührt, erscheinen Philosophie und Mathematik als "normative Wissenschaften" an die Spitze gestellt, es folgen die historischen W., die Naturwissenschaften und die "Geisteswissenschaften im engeren Sinne," nämlich Psychologie und Soziologie, endlich die praktischen Wis{65}senschaften. Es handelt sich hier um Nachwirkung der Ideen von Rickert und Windelband, die selbst mehr oder minder an Fichte's Wissenschaftslehre (also jedenfalls an die klassische Periode der Deutschen Philosophie) anknüpfen.

3. In Frankreich wirkt das 19^{te} Jahrhundert hindurch die Tradition der Enzyklopädisten nach (d'Alembert, Condorcet). Besonders zu nennen sind Ampère und Comte.

   a. Ampère hat ein ganz schematisches nach dichotomischer Methode gearbeitetes System (1834), bei dem er in erster Linie (nach dem Gegenstande der Wissenschaft)

      Kosmologie und Noologie

      entgegenstellt. Die Mathematik gehört bei ihm unter die "eigentliche Kosmologie," rubriziert also nach ihrer naturwissenschaftlichen Anwendung, die Philosophie gehört zur anderen Seite unter die Gruppe "eigentliche Noologie."

   b. Ganz anders Comte (1830). Alle Kenntniße durchlaufen nach ihm dreierlei Stadien: das dogmatische, das meta{66}physische und das wissenschaftliche. Nur ein Teil unserer Kenntniße ist bereits in das wissenschaftliche Stadium eingetreten. Comte trennt sie in abstrakte und konkrete, und unterscheidet bei den ersteren nach dem Prinzip, dass jede folgende Disziplin von den vorangehenden abhängig ist :

Mathematik, Mechanik, Physique céleste, Physik, Chemie, Biologie, Soziologie.

[Psychologie ist hier absichtlich weggelassen, weil damals noch nicht in "wissenschaftlicher Form" vorhanden; Logik wird auf die genannten Disziplinen verteilt ; Philosophie in allgemeinerem Sinne gehört unter Biologie und Soziologie].

4. Von englischen Systematikern sei Spencer gennant, der in Wechselwirkung mit den Ideen Darwins überall den Entwickelungsdenken voranstellt (1870). Er unterscheidet a) abstrakte Wissenschaften (die von den {67} Formen der Phänomene handeln), b. abstrakt-konkrete Wissenschaften (von den allgemeinen Eigenschaften der Dinge), c. konkrete Wissenschaften (die Lehre von den Dingen selbst).

   Zu a. gehören Logik und Mathematik, zu b. Mechanik, Physik und Chemie, zu c. Astronomie, Geonomie, Biologie, Psychologie, Soziologie. (Letztere beiden, Psychologie und Soziologie, sind so umfassend gedacht, dass sie die historisch-sprachlichen Gebiete mit einschliessen).

5. Wundt (um 1885) erscheint als Eklektiker. Nach längeren Erwägungen nimmt er als Haupteinteilung

   I. Philosophie   II. Einzelwissenschaften

   Unter II nimmt dann die Mathematik eine besondere Stellung ein, weil ihr Wesen (nach G. Cantor) auf der Freiheit beruhe. Andererseits werden Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften einander gegenüber gestellt. Die führende Rolle, welche innerhalb der ersteren die Physik beanspruchen kann, wird innerhalb der letzteren vielleicht eines Tags die Psychologie übernehmen. {68} Uebrigens werden den "theoretischen" Wissenschaften des weiteren die "praktischen" eindeutig zugeordnet.

{71} Inhaltsverzeichnis zum Winterseminar 1909/10.

p.15 Nelson (Dirichlet), Freundlich (Schachspieler)
Töplitz, psychologische Sammelforschung.

p.19 Bernstein, Steckel Decoster (Bemerkungen)
Klein, über Lie, I = Kugelkreis

p.24 Nelson. Probleme der Raumanschauung
Klein, über Lie, II = deutsche Liniengeometrie

p.29 Uffrecht (König's Buch über Kant)
Klein, über Lie, III = Linien-Kugeltransformation

p.33 Errera. Physiologisches betr. Raumanschauung
Klein, über Lie, IV = Zusammenfassendes.

p.39 Errera. Ohrlabyrinth

(Weihnachten) {72}

p.41 Bernstein. Ueber Georg Cantor

p.43 Steckel. Über Branford
Klein. Phasen der pädagog. Doktrin betr. Mathematik.

p.49 Behrens : Meumann, experimentelle Pädagogik.

p.54 Freundlich. Ueber Pestalozzi und Herbart.
Klein, ca. Th. Lessing

p.58 Klein, Volksschulmethodik.
Bernstein, Klassifikation der Mathematiker.

p.61 Freundlich, System Ziller
Nelson. Wesen der Mathematik.

p.64 Behrens, Errera, Weyl : Stellung der Mathematik im System der Wissenschaften.

English Translation

{1} Winter semester 1909-1910 (Mathematics and Psychology)

Opening of the seminar, October 27, 1909.

In the presence of the Dozents Mssrs. Bernstein and Nelson, who take part in the leadership of the seminar, as well as Mssrs. Töplitz and Zermelo.
The undersigned organizes the program. The general topic is the points of contact between mathematics and philosophy. The more strictly logical questions will be treated in the parallel lecture course by Zermelo; here we shall discuss all of the other mental processes which accompany the logical processes and in part precede them, and which are here simply called psychological.
The procedure will be that I myself – or Mr. Bernstein or Mr. Nelson – give a general introductory lecture on the individual questions, followed by discussion and mention of relevant literature.

{2} The students then undertake to report on this or that particularly interesting publication.
Here we must assume a certain familiarity with the principles of today's academic mathematics, as well as a disposition to philosophical reflection.
The following list of topics should not determine the activities of the seminar, but rather offer just a few suggestions for the proposed task.

1. On the working methods of productive mathematicians

   The modes of activity in the individual are extremely varied. Interesting self-reports will be recounted here, e.g. by Gauss. A recent study in the journal *Enseignement*. German research on exceptional talents (Stern in Breslau, Lipmann in Neubabelsberg).

{3}2. On the formation of basic mathematical intuitions in the growing individual

   Spatial representation (much studied by physiologists and experimental psychologists) as well as number representation. – Among the points of interest is the difference between mathematical and artistic conceptions of space.

3. The formation and epistemological importance of mathematical axioms

   Are they given by intuition or by experience? On the nature of mathematical proof.

4. On the errors of mathematicians

   The possibility of error demonstrated historically (Maxwell's theorem). Secular errors corrected by the development of the sciences, cf. the discovery of one-sided surfaces, of non-Euclidean geometry, {4}, of continuous functions without derivatives. – Individual mistakes brought about by chance. – Typical errors that cannot be stamped out: perpetual failed attempts at squaring the circle, at angle trisection. (Past proofs of Fermat's theorem form a collection of individual errors).

5. Implications for mathematical instruction

Methods in kindergarten and elementary school: methodical buildup of purely descriptive geometry and of purely practical arithmetic instruction.

At the higher schools, intertwining of a provisional propaedeutics and a more rigorous foundation.

At the universities: Mathematical lectures for technicians or engineers, for genuine mathematicians at different stages of training.

{5}6. On the position of mathematics in the system of the sciences

History of the meaning of the word "Mathesis" in antiquity, in the Renaissance, etc.

Meaning of the word in more recent authors.

Our actual sphere of activity and the prestige which we must accordingly claim.

[During the discussion various other topics were suggested, e.g. the interrelation of mathematics and language, the importance of denotation in mathematics (cf. symbolic methods), differences between mathematical science and mathematical play, etc. etc.]

Klein

{6} Meeting of Wednesday, November 3, 1909.
Commencement of topic I (working styles of creative mathematicians).
Weyl reports on the related study in the 1905-1908 volumes of *Enseignement*. It can be regarded only as a first approach in the direction that interests us. For neither the 30 questions nor the respective answers are precise enough to base any general conclusions on them.
{7} Klein relates the genesis of his work on non-Euclidean geometry (1871, 1872. Revision of non-Euclidean geometry with the various cases of Cayley's projective measurement).
Klein had learned the projective way of thinking from Plücker and Clebsch, and had then read Cayley's paper* with great enthusiasm in the autumn of 1869. Then in the winter of 1869-70 (in Berlin) he heard from Stolz, who was studying with him there, about the existence of non-Euclidean geometry. It was immediately self-evident to him that the two would have to be in accord with each other. He

*Brought to his attention by the account in Salmon-Fiedler.

presented this view in February 1870 in Weierstrass's mathematics seminar, at the end of a lecture on Cayleyan measurement, in the form of a question. But Weierstrass retorted that these were completely separate areas of the science. After that Klein abandoned the idea for the time being.
It reemerged for him as he was once again with Stolz in the summer of 1871 (this time in Göttingen).
{8} Stolz provided him with details from Lobachevsky, von Staudt, Beltrami (whom Klein had not read at all at that point; even today he knows them very inadequately). There was everywhere a correspondence with the correctly understood Cayleyan doctrine. On the other hand strong suppression by the view, coming especially from Lotze, that the whole non-Euclidean speculations were nonsense. Out of this back and forth there grew the first publication, which appeared in short form in the *Göttinger Nachrichten* of August 1871 and in full soon thereafter in *Mathematische Annalen* 4.
The paper in *Annalen* VI (1872) shows the great resistance the analyses encountered in mathematical circles. Even Cayley has never been able to bring himself around to full agreement. He said at the 1873 meeting of the British Association in Bradford that he views the parallel axiom as "strictly axiomatic," and in Vol. II, p. 605 of his collected works he again remarks that a grounding of the concept of distance in von Staudt's projective coordinate system gives rise to at {9} least the appearance of circular reasoning.
Here, then, is an example in which a mathematical insight is first so to speak pre-formed in an individual, and then, as a result of the resistance it encounters, felt by the individual to be an advance and worked out clearly from all sides in a fight against all kinds of objections.
The further development is then that the next mathematical generation adopts the result from the start as something established, no longer understands the earlier differences of opinion, and more or less goes back to normal about the whole thing.

Klein.

When I asked Prof. Helmholtz in 1893 what internal relationship there was for him between the general validity of the principle of least action throughout physics (1885) and the validity of the principle of conservation of energy (1847), he said to me: for him [10] the analogy is that both are inherently self-evident.

> "[As for my own work, I have often proceeded in such a way that I viewed the results of two subareas as given and asked what the one means for the other. Compare as typical the use of algebraic invariant theory in my introduction of hyperelliptic and abelian σ-functions, *Mathematische Annalen* Vols. 27, 32, 36. In stating the corresponding theorems, I have let myself be guided in many cases by an indeterminate but in hindsight accurate feeling of analogy. I took a special pleasure in this: I did not quite know which invariant of

> a binary form Sylvester had called a catalecticant, but I reckoned that the first term in the series expansion of certain hyperelliptic Sigmas must be exactly this catalecticant. It was Hilbert who helped me to put things straight, but the theorem, as I had suspected, really was correct.]"

Klein.

{11} Meeting of Wednesday, November 10, 1909.
Klein recounts something of Gauss' working style, as encountered partly in Gauss' correspondence and then notably in the especially important diary published in *Mathematische Annalen* 57.
Gauss began very early (as by the way did Euler) to draw up extremely extensive tables on the behavior of whole numbers; see for example the tables of decimal expansions of 1/? for all prime numbers under 1000, reprinted in Vol. II, or the computation of the prime numbers in the first 3 million ibid. But he must have also familiarized himself in every way with the numerical values of the more important constants occurring in analysis, their logarithms, etc., so that he was in a position to recognize them anywhere. Thus prepared, he finds the most remarkable results inductively, then forcing out the proofs through more intense and much more painstaking work.
{12} This practice in number theory is relatively straightforward and also used by other authors; see Gauss' discovery of the law of reciprocity of quadratic remainders or his comparison of prime number frequency with $\int dx/\log x$. But Gauss also uses the same method in his investigations of elliptic functions! See No. 63 of the diary, where he finds, by numerical calculation, the factor by which the theta function of lemniscatic functions increases upon multiplication of the argument by one period to be $e^{\pi/2}$, or No. 98, where he discovers that the arithmetic mean of 1 and $\sqrt{2}$ corresponds up to the 11th decimal with $\frac{\pi}{\tilde{\omega}}$ ($\tilde{\omega}$ understood as the lemniscatic period)! He adds: "qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur."* And only 6 months later do the theoretical results begin to materialize.
It is also very remarkable how he expresses himself to Olbers about his determination of signs for "Gaussian Sums," which, according to the diary, he achieved on August 30, 1805 {13} (No. 123). He writes on September 3, 1805 (Correspondence, Vol. I, p. 268):

> "All the brooding, all the searching (for the proof of the inductively found result) has for four years been in vain, every time I have had to put down my pen in sorrow. Finally a few days ago it succeeded – but not through my painstaking search, rather I should say by the grace of God. As lightning strikes, so did the mystery resolve itself etc. etc. (the details must be consulted on location)."

*["Through this proof there surely opens up an entirely new field in analysis." -Tr.]

One can see: endless diligence achieves the preparation, until suddenly the liberating formation of ideas takes place. (Gauss, by the way, is supposed to have said that he differs from other mathematicians only in his diligence).

After this Freundlich reports on the psychological study of the procedures of famous talents in mental calculation. According to Binet, *Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échec*, Paris 1894, the Paris Academy could determine as common to both of the famous calculators {14} Inaudi and Diamondi only that both were completely without mathematical education; the former proved absolutely aurally disposed, the latter visually, so that depending upon the type of question sometimes the one and sometimes the other worked more quickly.
Their record has long since been beaten by our Dr. Rückle, who took his doctorate under Hilbert with a dissertation in number theory and whose computing talent has been studied in detail since then by G.E. Müller (Report to the Congress of Psychology, Giessen, 190 ; — not yet published). Dr. Rückle now appears on varieté stages with great success. He stands out from the other well-known calculators in that he comes from a successful mathematical education and undoubtedly also uses it in the execution of his calculating operations.

{15} Meeting of Tuesday, November 16, 1909 (in conjunction with the Mathematical Society).
Nelson reads out a letter by the 22-year-old Dirichlet to his mother (dated Dresden, October 29, 1827). Dirichlet recalls how for a long time he strove in vain to prove Gauss' first reports on the reciprocity laws of quartic remainders.

> "One evening, as I was walking alone on the Elbe Bridge, I had a few ideas which promised to put me in possession of what I had searched for so long and so eagerly. On the magnificent Brühl Terrace I surrended myself to my thoughts for several hours, but I still could not get a grip on the issue. I lay down in bed with my weakened hope and spent the night quite restless, until I finally fell into a proper sleep around 1 o'clock, from which I then awoke at 4 o'clock as I woke the [Medizinalrat], who slept in the same room, with the cry: 'I found it.' Getting up, turning on the light, and convincing myself with pen in hand of the correctness of {16} the thing was a matter of an instant. etc. etc."

[Töplitz has similar self-reports by Rosenhaus concerning the sudden materialization of a needed turn of thought.]

Freundlich reports, in connection with his previous presentation, what Binet has to say about the psychology of great chess players, especially of blindfold chess players. Surprisingly, the crucial role in the latter is played not by visual memory, but rather by the logical linking of all of the moves of a particular match. Memory accordingly carries on very much longer than it does in mental computation, so

that e.g. Tarrasch could still precisely recall individual matches after 12 years. But Binet did not come to any definite general conclusions – the above fits quite well with what Landau recounts of his own experiments with blindfold chess.*
{17} Töplitz speaks about the Institute for Applied Psychology and Psychological Research, under the direction of Bode, Lipmann and Stern. There are subcommissions for the different kinds of specific talent, e.g. in mathematics, each composed of specialists and one psychologist (for mathematics, besides Töplitz, Blumenthal and Rupp [at present Assistant under Stumpf]). An (itself already very extensive) fragment of a general questionnaire has just been made available, now to be tested further in the various subcommissions. ** It is noteworthy that they now aim mostly to investigate normal rather than above-normal talents, because with them one may hope to arrive at reliable average values.
More specific questions that were discussed afterwards:

1) {18} Comparison of mathematical and musical ability. Of the about 40 present, 18 attest that they can clearly differentiate between major and minor, 15 that they cannot. Nine are (in one form or another) practicing musicians.

2) Klein, in his *Evanston Colloquium*, divides mathematicians into philosophers, intuitionists and algorithmicians. What are we to think of this classification? What of the division into "classicists" and "romantics" that Ostwald makes generally among academic researchers in his book on *Great Men*?

3) Bernstein claims that a researcher's later work depends not only on his disposition, but also very considerably on the influence of his environment. See e.g. the fundamentally arithmetical mindset of the Berlin school, or also many Italian mathematicians in whom one cannot doubt the presence of an originally geometrical talent.

{19} Meeting of 24 November 1909.

Bernstein reports on some of Meumann's studies. It is investigated whether the tendency in acquisition of e.g. number order is rather visual or auditory etc. To be sure, it is not yet established whether the outcome is a result of different original dispositions or of the influences to which the individual has been exposed. The most common and also most useful kind of disposition turns out, according to Meumann, to be the visual-motor.** School has an extraordinary influence, but it should reduce the idiosyncrasies of development rather than increase them. If Italian mathematics today has a character of great abstractness, then this is a

*G.E. Müller distinguishes within visual memory between local and form memory; he views the ability of blindfold chess players as local visual; the respective restriction to a part of the chessboard is due, he says, to concentrated attention.

***Journal of Applied Psychology* Vol. III, 1909 = Fragment a psychographic table.

**Seeing and speaking!

result of the historical development of their highschools, whose upper classes are ruled by logic, more generally by philosophy in the older style etc., and on the other hand by arithmetic.
Steckel relates some of the observations {20} he believes himself to have made in the East concerning the conduct of members of different races (Germans, Poles, Jews) with regard to mathematical subject matter. Germans calculate 7 $\frac{1}{4}$ - $\frac{3}{4}$ in the form = 7 - $\frac{1}{2}$ = 6 $\frac{1}{2}$, thus grasping the task intuitively; Jews calculate 7 $\frac{1}{4}$ = 29/4, therefore 7 $\frac{1}{4}$ - $\frac{3}{4}$ = 26/4 = 6 $\frac{1}{2}$, thus applying general logical rules. Poles tend to grasp only the words of the mathematical rules, which is how they then excel in language instruction as well.
Decoster makes some remarks about Bergson, especially his conception of time. According to Bergson, time, unlike space, is not homogeneous, but rather a succession of qualitatively different mental states. Thus it is completely misguided to associate time with the concept of number. The goal of psychophysics is misguided from the start. A clock shows the difference not between two times but between two places.

{21} Klein complains of the great difficulty in discussions about the general character of mathematical activity that the listeners know far too little about the relevant mathematical disciplines.
With the task of giving a picture of the peculiarity of Lie's genius, he will proceed in such a way that he limits himself to one individual, particularly characteristic achievement (the line-sphere transformation) and here first describes certain methods or developments or ways of thinking which Lie found already developed. (The example of Lie should at the same time show that in some circumstances mathematical production has extremely little to do with logical inference from given premises).
1. The use of the so-called Kugelkreis[?] in the study of any metric relations of geometrical figures. – The Kugelkreis[?] is defined by its use in the cutting of spheres in finite space, as discussed in the theory of confocal surfaces of second degree. {22} Definition of the Dupin cycloid (with its circular curvature curves, the general cycloid (functions which contain the Kugelkreis doubly [? doppelt enthalten]). There is an orthogonal system of general cycloids (discovered in 1867 by Darboux and Moutard); hence the curvature curves of the latter are algebraic curves of the eighth order.
By way of logical justification of the procedure in these geometrical studies, one might perhaps invoke the general right to work with complex numbers, or even the possibility of conceiving of all [Entwickelungen] of complex numbers in a geometrically concrete way following von Staudt, but in reality the train of thought is a different one: now and then one replaces the imaginary conic section by a real one, reasons with the latter in mind, notices once again that the conic section is of course imaginary, etc. It is a play of analogies with the real, controlled much more by a finely trained feeling than by a critical activity of the understanding. Lie called one {23} such method an "inference through air," that is, a flying, instead of laborious forward movement on the Earth's surface.

The treatment and use of the straight lines that cut the [Kugelkreis] are especially amusing: they have length zero and are perpendicular to themselves (more precisely: they form angles of indeterminate size with themselves). The French call them "droites isotropes," because the lines $y/x = [\pm]i$ remain in place during rotation of the XY-plane around the origin (they form an infinitely large angle $= \int \frac{(ydx-xdy)}{(x^2+y^2})$ with all other rays running through 0). In his later publications Lie used the word "minimal lines," for himself and in a private conversation he called them "crazy straight lines."

{24}Meeting of December 1, 1909

Nelson makes introductory remarks on the problems of the development of spatial representation and of the spatial axioms. The great differences of opinion seem to lead back to the fact that the fundamental questions are not distinguished with sufficient clarity. One can differentiate:

a. Temporal entrance of spatial representation into consciousness.

If the capacity for spatial representation is regarded as given a priori, i.e. as an original capacity of the human mind, it must still be activated by particular causes. Something like this is currently the opinion of most psychologists. This does not exclude the possibility that the capacity for spatial representation is first acquired by the species (Spencer). Very instructive experiments with the congenitally blind after corrective surgery. They must appropriate for themselves the idea* of distance and of shape itself, which with different individuals takes hours or days. Are the corresponding observations really so certain?]

{25} b. The underlying source of space perception

α. The old controversy of whether it is a matter of perception in the narrower sense, or of the conceptual (in Kant, Lie, Leibniz). The controversy is not to be decided as long as all of the available words have fluctuating meanings.
Psychologists, by the way, now generally distinguish (following the example of E.H.Weber) visual space, tactile space, motor space as perceptual substrates. But how do they combine themselves into "geometrical space?" Associations certainly play a role, but are they enough for an explanation? E.H. Weber also distinguished a general spatial sense.

β. Does spatial representation as such have an empirical character** or is it a priori, i.e. an original capacity particular to the subject?* Note that in everything empirical there is a limit to precision, {26} that observed areas of space are always only finite, etc.

What is one to think of Lotze's theory of local signs, according to which spatial sensation depends essentially on the point of sensory stimulation?
God's perception of empty space?

* "representation"
**Cf. Mill and Helmholtz
*Cf. Kant

c. The physiological correlates.
Cf. specific and gradual development of the human brain. The role of the three semicircular canals etc. etc.

In the discussion Klein mentions that according to Poincaré one should at first distinguish as many dimensions of space as there are nerves in the individual, that from there the idea* of movements in space arises by association and one then arrives at certain fundamental geometrical concepts, e.g. the concept 'point', as one detects the presence of certain master groups of movements. Klein describes this and other *aperçus* as {27} more witty than accurate. How can one even speak of a definite number of nerves? Bernstein explains, in connection with Poincaré's notion of point, that it is natural to think of the seat of one's own self-consciousness as a basic unit, and that this unit appears to remain unchanged during turnings of the head. Bernstein thinks the more strictly psychological problem of the development of spatial representation delimited by its concern solely with the mutual influence of various sensory perceptions, while Nelson emphasizes that this altogether misses the essential point of the question, the emergence of space representation as such.

With the intention of making Lie's discovery of the line-sphere transformation comprehensible in content for the listeners, Klein this time recounts the line-geometrical work of the German school (Plücker, on the other hand {28} Kummer, then Klein himself in his early work). Line coordinates p_ik — line complexes – quadratic complexes. The singular surface of a quadratic complex — location of the points whose complex cone resolves into two planes – is a Kummer surface of fhe fourth order and class, with 16 "double points" and 16 "double planes." The individual Kummer surface is a singular surface for ∞' quadratic complexes, among which six linear complexes are found double-counted. It therefore also appears as caustic of 6 congruences contained in these linear complexes (1,2).
Presentation of numerous models of Kummer surfaces (the so-called Plücker complex surface is a degenerate case in which a double line arises).
In order to maintain an overview, one must everywhere apply the projective way of thinking. It is therefore natural to ask not about the curvature curves of the Kummer surface but about its main tangent curves. Some remarks concerning their behavior.

{29} Meeting of December 8, 1909.
Uffrecht speaks about König's book *Kant and the Natural Sciences*. Its foundations seem to him so unclear that he must for the moment decline reporting on them conclusively.
Klein continues his presentation on Lie. The achievement of Lie to be treated here is the joining of the French body of ideas concerning the use of the [Kugelkreis]

* "representation"

for metric problems with German line geometry through the [Berührungstransformation], which groups together lines and spheres (Paris, 1870).
The general ideas, as they later presented themselves to Lie, can be indicated by the key words:
Concept of the "element" ($xyzpq$). "Common location"[?] of two neighbouring elements: $dz - p\,dt - q\,dy = 0$. Point, curve, surface as special cases of the "unions" of ∞^2 elements. {30} "Berührungstransformation" = element transformation which carries over unions into unions. Expressed accordingly by one "aequatio directrix," or by two, or three.
The analytic formulas and theorems by which these ideas are formulated precisely are all essentially contained in the old investigations by Lagrange and others through Jakobi on canonical <u>substitutions</u> in theoretical mechanics (astronomical perturbation theory). But as Lie rediscovered these ideas in a geometrical mode, they came more powerfully to life in his work.
The line-sphere transformation, to which it ultimately comes down, is itself given by very simple formulas. One defines the line following Plücker by the equations $x = rz + \rho$, $y = sz + \sigma$, the sphere by $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$.
It then suffices to set:

$$r = \alpha + i\beta,\ \sigma = \alpha - i\beta,\ s = \gamma + R,\ \rho = -\gamma + R\ .$$

The deeply reaching geometrical significance of this {31} transformation lies in the fact that it is imaginary. What can seem more dissimilar to the naïve view, asks Darboux, than the totality of the elements huddled in a sphere and the totality of the elements in a straight line? And yet from the point of view of a general theory of elements that [fähig nimmt] all variables of complex value systems [? Wertesysteme], they are equivalent.
This must be considered in detail if one really wants to understand the matter. What corresponds to the "elements " of a line that contain the same point or are contained by the same plane? The sphere contains two scrolls of minimal lines as generators and to those elements correspond those [Berührungselemente] of the sphere which are aligned along a generator of one of the scrolls. What corresponds to the elements which [berühren] the sphere into the points of a circle? In lines a band of {32} elements in which the points and planes of the elements are in some way linked by a projective relationship.
One works by advancing such theorems and then using them again oneself for the derivation of new truths, so to speak in a middle ground between intuition and conception.
(To be continued).
[Elementary developments concerning the line-sphere transformation in the record of my lecture course on curves and surfaces of the summer of 1907]. [But the best part, the connections in the imaginary, I could not discuss at that time considering the layout of my course and the composition of my audience.]

{33} Meeting of December 15, 1909.

Errera begins his presentation on physiologists' investigations into the development and dependability of space perception, based especially on Nagel, *Handbook of Human Physiology*, Vol. III (Vieweg 1905):
Experiments by Delage and others concerning position in space, movement, resistance. In an altered position one maintains a fair sense for the vertical direction, but this is strongly affected by the position of the head. According to Mach one does not feel uniform translation at all; in any accelerated movement (thus also in uniform rotation) the vertical sense accords with the resultant of weight and acceleration (centrifugal force). Vertical and horizontal crossing with head bent to the right (and closed eyes) = X
Theoretical implications: Apart from the vague sensation of the internal organs, spatial orientation seems to take into consideratation mainly sensation in the inner ear labyrinth. Dizziness (rotation dizziness, as opposed to vertigo) seems to arise from conflict between the various {34} cooperating senses. Compare experiments with a swinging mirror so large that it almost fills up the visual field (while the observer is at rest). Only a very few people do not become dizzy, but indeed a large percentage of deaf-mutes (in whom one can suppose a degeneration of the inner ear).
(To be continued).

Klein completes his presentations on Lie.
What is beautiful about the line-sphere transformation is that it does not deliver indifferent results, but links the essential problems of metric (French) geometry with those of (German) line geometry. First some familiar matters – here and there the double generation of the hyperboloid by straight lines with the double hull of the Dupin cycloid by spheres. The Kummer surface as caustic of the congruence (2,2) of the linear space with the general cycloid. But now {35} something new (until then unknown). When one sees the curvature curves of the general cycloid as algebraic curves of order 8, the main tangent curves of the Kummer surface emerge as algebraic curves of order 16!
[From the point of view of points the Lie transformation presents itself in such a way that to each point of the spherical space [?Kugelraumes], there corresponds a line of the linear complex s + ρ = 0, and to each point of the linear space, a minimal line. A particular straight line of the linear space is singular in the mapping (it corresponds to the totality of ∞-distant points of the spherical space), likewise in the conic section of the spherical space, i.e. the "Kugelkreis".
Now how did Lie find these theories? This is the psychological question that interests us. Here some biographical facts:

1. Youth in the countryside, normal university studies in Christiania.

2. Several years without proper occupation as a private tutor. Elementary teaching interests. Meanwhile all sorts of bizarre habits. Excessive hiking. Feats of physical strength.

3. {36} At age 25 accidental acquiantance with the geometrical writings of Plücker and Poncelet. Resolution to work in geometry himself, and strong conviction that this must succeed.

4. First attempt with an in itself trivial problem: Interpretation of the imaginary in plane geometry, in which for $x = \xi + i?$, $y = ? + iT$ [im Raumpunkt {?} mit dem "Gewichte" T gesetzt wird]. Here all sorts of interesting relations arise, among them the mapping of the linear complex onto the point area, within which lies a fundamental conic section. (This mapping published shortly before then by Nöther in the *Göttinger Nachrichten*).

5. Now chance (the influence of the environment) intervenes, as Lie comes to Berlin on scholarship for the winter 1869/70 and becomes acquainted with German line geometry through Klein.

6. Similar coincidence in the summer of 1870 as Lie goes with Klein to Paris, where the [Kugelkreis] and related problems are on the {37} agenda.

7. How does Lie now come upon the idea of running the fundamental conic section that forms during mapping [?] of the linear complex into the [Kugelkreis] and of immersing himself unremittingly for weeks and months in the resulting relations? "A good man in his darkest aberration still holds awareness of the righteous path."a* (Lie later said: For a long time I "lived" in parallel in those two spaces.)

8. One early morning at 7 o'clock Lie calls me into his room (where he still lay in bed) and tells me in an excited but to me (despite all my practice) still completely incomprehensible manner that curvature curves carry over into main tangent curves and that the main tangent curves of the Kummer surface thereby come out as algebraic curves of order 16.

9. I neither understood nor believed this, but I noticed during the day that the main tangent curves of the Kummer surface coincide with 16$^{\text{th}}$ order curves of which I already knew from my line-geometrical investigations {38} and whose attributes – class, rank, singularities, behavior in the real – I could determine exactly. When I told Lie about this in the evening, he replied irritably: I told you they were 16$^{\text{th}}$ order curves. He had thus been completely convinced of the intrinsic rightness of his declarations despite their disorder.

10. We do not see here anything like a determinate working plan with a goal fixed in advance. Everything rational withdraws strikingly: Lie had a relatively limited background and not in the slightest, as one supposes today, precise basic concepts. Nor did he proceed anything like analytically. A strong internal drive to production within the possibilities and stimulation

*[God's declaration of faith in Faust; see Goethe, *Faust I*, Prologue in Heaven. -Tr.]

> provided by the environment! It is as with every other form of creation: "The wind bloweth where it will, and thou hearest the voice thereof, but knowest not whence it cometh, and whither it goeth: so is every one that is born of the Spirit." a*

{39} Meeting of December 22, 1909.
Errera completes his report on the physiological correlates of space perception: Description of the inner ear labyrinth: The 3 semicircular canals lie roughly in three mutually orthogonal planes (one in the horizontal plane, the other two leaned against the sagittal direction at 45°). Endolymph inside, sensory hairs, on their ends small bits of chalk.
The significance of the semicircular canals was discovered in 1828 by Flaurens (Paris), taken up again in 1870 by Goltz (Strasbourg) = organ for balance, in 1892 by Ewald (again Strasbourg). Experiments with pigeons and frogs whose semicircular canals had been destroyed. Strange rotations and oscillating motions. Similarly with crabs, from whose rudimentary, externally accessible surrogate organ one removed the little stones.
The theory of Mach and Breuer, according to which the pressure of the endolymph on the otolith-heavy sensory hairs is the deciding factor.
{40} Cyon carried the studies further, but at the same time spun the theory out into the fantastic. The semicircular canals are according to him the organ of Euclidean geometry, the cochlea the organ of number, from the interaction of the two the construction of time!
After all, the semicircular canals are just one of the organs which give rise to our space representation and determine it more precisely. The eyes and eye corners (herring in Hermann's physiology), hearing and of course touch and movement sensations also come into consideration. The predominant view of modern physiologists holds that these various sensory perceptions are processed into spatial representations in the cerebellum.
[Professor Bernstein reports on the remarkable observation of Urbantschitsch in Vienna that injections into the labyrinth can cause changes of orientation in the visual field.]

{41} Meeting of January 19, 1910.
Bernstein reports on the development and character of Georg Cantor. Cantor characterizes himself as an intuitionist, in contrast to Dedekind, whom he regards as a typical logician. He believes in the objectivity of mathematical entities and feels himself to be not their inventor, but rather their discoverer. His new ideas have always developed from an occupation with concrete problems: the question of the countability of sets from the investigation of the identical vanishing of trigonometric series, transfinite numbers during reflection on the successive [Ableitungen] of a given point set. On the one hand a heartfelt admiration for mathematical possibilities (Cantor compares a "set" with an abyss, Dedekind

*[John 3:9. -Tr.]

with the contents of a sack), but on the other hand total clarity of concepts and a strong gift for systematization. {42} Algorithmic mathematics is quite foreign to him. Here e.g. a strong aversion toward Peano. Du Bois too, with whom he often interacted academically in earlier years, he disliked because of the vagueness of his views. – With regard to philosophy Cantor likes to call himself a Leibnizian. But he has also eagerly studied the scholastics with their systematic conceptual constructions. Far-reaching interest in all literary-historical questions, much less in the natural sciences, theater.

{43} Meeting of January 26, 1910.

Steckel reports on Branford, *A Study of Mathematical Education including the Teaching of Arithmetic*, Oxford 1908, and Mair, *A School Course of Mathematics*, Oxford 1907. (The two books are interdependent. Branford's book grew out of lectures in which he offered more general considerations; Mair's book attempts a curriculum design. In doing so, however, he thinks not of an organized school, like our elementary school, but of the instruction of an individual child, with whom one can linger on an individual topic as long as it takes for the child to really understand it.)
The basic approach in Branford is that the child has to go through more or less the same stages of cognition that the human race actually went through in its development (basic law of biogenetics). He thereby differentiates the "empirical," the "systematic," and the "aesthetic" stages. At every point one should begin not with basic principles drilled into the child from outside, but with problems that he solves on his own. These problems always tie into concepual contents that are {44} already available to the child.
E.g. beginning of geometry: what marks do I have to make for myself in a yard in order to later find the spot where I buried a treasure?
[Satz vom Peripheriewinkel im Kreise]: angle of danger near two lighthouses (corresponding to the location of ?????? cliffs).
Beginning of combinatorics: signaling with Morse code.
This system of instruction is supported by the experimental results yielded by studies with adolescents. It turned out that the ability to understand abstract formulations, or even to accept them as valid, is very much more limited than the adult supposes. E.g. it is admitted that two segments the same number of centimeters in length can cover each other, while meeting with refusal the theorem that two magnitudes, each of them equal to a third, are also equal to each other. –
Nelson remarks that in the basic instruction in counting and geometry that the students in Charlottenburg and elsewhere now provide for workers, [45] similar experiences and approaches have emerged spontaneously, i.e. without knowledge of the currently available literature. a*

*

Bernstein remarks that the first cohesive community college mathematics courses were held by Dupin in Paris in 1829, following a journey to England in which Dupin studied working conditions there.a*
Klein recounts a characteristical experience that Brill had recently, as he lectured on the congruence theorems at a trade school at the beginning of his scientific career in Berlin. A student replied to him: but triangles are always congruent! He knew triangles only as the wood pieces on sale at his school for geometric constructions in drawing.

———-

As preparation for further lectures on mathematical pedagogy, Klein lays out the following pattern of development: {46}

———-

1. The traditional scholastic pedagogy, which has children sequentially learn the theorems of a systematic textbook, e.g. Euclid.

2. Pestalozzi's basic idea, that any natural elementary instruction must tie into the child's "intuition," systematized by Herbart and worked out in detail by his students, among them Ziller (Leipzig), Story (Jena), etc. The starting point is what Herbart called "psychology." Herbart's system still dominates completely in the elementary schools and in the majority of elementary school pedagogues. More to be said on this.

3. The "new school" of observing and experimenting pedagogy (and psychology).

   Societies: for Experimental Psychology, chairman G.E. Müller. So far congresses in Giessen 1904, Würzburg 1906, Frankfurt 1908, upcoming 1910 Innsbruck.

   One-time congress Berlin 1906 for youth research {47} and youth welfare (1906). Annual report Langensalza 1907.

———

Bode, Lipmann and Stern's Institute for Applied Psychology and Psychological Research (Neubabelsberg).
Brahn's Experimental Institute in Leipzig, founded and maintained by the Teachers' Association of Saxony.

———

Meumann's *Journal of Experimental Pedagogy* (Münster, now Halle).
Brahn, Deuchert, etc., *Journal of Educational Psychology.*

———

Textbooks. Besides Meumann one should note e.g. Rudolf Schultze, *From the Workshop of Experimental Psychology and Pedagogy*, Leipzig 1909.

———

*Details in Poggendorff's lexicon.

All of this relates only to the emergence of the "new school" in Germany. The German Teachers' Association (chaired by Rühl in Berlin) recently established a Central Office of Education (chaired by Director of Continuing Education Haumann in Berlin), and at its meeting of December 29, 1909, this office approved the plan developed by Dr. Brahn for a {48} "pedagogical academy," i.e. an independent instution, staffed with a larger number of instructors, in which the full range of questions of modern pedagogy are to find a systematic treatment as long as they receive insufficient treatment at the universities.

{49} Meeting of February 2, 1910.

Behrens reports on Meumann, *Experimental Pedagogy* (2 volumes).
Experimental pedagogy is a science which is still in its beginnings; one must be content to find provisional formulations which are still not at all adequate for practical application.
Meumann addresses, among other things, the general question of how one can characterize the ability of a normal child. The exactness of sensations seems to him not very important, more so the strength of memory. He directs his interest throughout toward the intellect (behind which the will, the moral qualities in general stand in shadow). Here he differentiates between types

a) of intuition, whether describing (apprehending details) or observing (comprehensive),

b) of attention, whether fixating (intensive but narrow) or fluctuating,

c) of representation. One can distinguish object representations and word representations, on the other hand the attributes visual, {50} auditory and motor. Object representations are primarily visual, word representations more auditory or motor.

In early childhood these types appear to still be open to influence, later they are fixed. In childhood the object representations predominate, in the adult the word representations.
[Klein compares the two kinds of representation with the practice of synthetic and analytic geometry. He himself follows the *méthode mixte*, i.e. he continues to keep geometrical figures in mind, but employs analysis in his inferences].
In addition Meumann discusses specific areas of instruction:

a. Intuitive instruction, on the basis of demonstration and thought experiment. Up to age 8 the "substance stage" predominates, from 8 to 9 the "action stage" (how do visible things act on each other?), from 9 to 11 the "relative stage" and from there on the "quality stage."

b. {51} Learning to read. An object or word image should be associated with a given character. One can distinguish 1) the synthetic method of instruction, which builds words up from letters, 2) the analytic, which decomposes a word into sound complexes and introduces written signs for them. No.1 can be treated by spelling out (K = “Ka”) or sounding out (K = K’). This sounding method is now generally accepted in beginning instruction. No. 2 characterizes the way the adult actually reads, but is too imprecise at the beginning. Cf. ’ei’.

On eye movement during reading, on the importance of peripheral vision, etc.

c. Learning to write. First an “artificial” handwriting, later a “natural” one that seems to depend more on the course of brain processes than on the writing hand. In the latter the individual letters flow into each other.

   On the temporal distribution of pressure during writing (shown in graph form).

d. {52} Number memorization. Should it occur graphically through the placing of identical markings, e.g. ///, side by side, or through counting out, with place marking by the numeral (e.g. 3)? That corresponds as it were to the distinction between cardinal number and ordinal number. Larger numbers are best grasped through square diagrams:

```
0  | 0 0 |  0 0 |  0 0 |  0 0 0 |  ...
   |     |  0   |  0 0 |  0 0   |
```

   By the way an intelligent grasp of the numbers sets in relatively late, apart from memorized words the child has at first only an indefinite feeling of multiplicity.

e. Drawing (with a utensil). Why are there so very many bad drawers (primarly in drawing from memory)? Various causes can come into consideration: Inexact vision, inexact reproduction of what is seen in represenation, simple clumsiness of the hand (try having them draw circles or straight lines), inexact {53} association between representation and the activity of the hand.

One can see that the foundations reached so far still by no means suffice for the construction of a definite methodology (let alone one adapted to the individual) for counting instruction or instruction in geometry. We must, however, hold on to the goal of working through all the tasks of mathematics instruction up through the university using experimental pedagogy!

{54} Meeting of February 9, 1910.

Freundlich reports on Pestalozzi’s *The ABC of Intuition* and Herbart’s subsequent publication *Pestalozzi’s Idea Scientifically Implemented* (1802).

Pestalozzi has the division of line segments and squares into congruent subsegments and subsquares carried out in every which way to the point of exhaustion.
Herbart sets the triangle in place of the square as the basic figure of all geometrical intuition. The task is to grasp every possible triangle shape conceptually and to bring out all other figures by combination of the appropriate triangles.
Thus at first the construction of right-angled triangles with angles of 5°, 10°, 15°, etc. Readout of their side lengths using scale rulers. Composition of triangles in general from these basic triangles.
The children are to learn the measurement relationships obtained in this way by heart. But it is good for them to also memorize the figures externally as early as possible. One should place the basic triangles and other figures in front of them even in the cradle.
{55} Instruction in geography and astronomy later starts by connecting the main points on a map of the earth or sky using triangles and then classifying these triangles by their locations on the chart of triangles derived earlier!
Now what kind of effect have these ideas of Herbart's had in the elementary schools in the context of his general psychological-pedagogic ideas? This is hard to discern, since the methodological accounts in the encyclopedias mention the problems of mathematics instruction quite in passing if at all.

Klein brings up a recent essay by Theodore Lessing, in which Lessing urges the difference between abstractly mathematical and specifically scientific (intuitive) thinking and seems to advocate a clean division between the two spheres of thought. Thus achievements such as that of Helmholtz – or also Archimedes, Newton, Gauss (to name only the greatest) – would be pushed off {56} to the side. We, on the other hand, have always believed that a substantial part of the cultural mission of mathematics lies in the processing of material coming in from outside – that mathematics itself receives the most powerful impulses in this way. At any rate it is only in conjunction with this conception that mathematics can maintain its far-reaching importance in schools as well as universities, and it is beyond comprehension that a lecturer of philosophy and pedagogy at a technical university would recommend the opposite strategy. If Lessing sees a contradiction between Klein's behavior with respect to practical questions and the fact that Klein worked on non-Euclidean geometry, one can only assume that he has not read Klein's work on non-Euclidean geometry. The work just referred to in fact boils down to conceiving non-Euclidean geometry as something simple and intuitive, shaping it with general mathematical notions into a convenient method. Lessing, by the way, claims genuine, abstract mathematics in particular for the Jews.
{57} The difference and the interrelation between mathematical and scientific thought cannot be stated in a few sentences. Klein therefore cites in particular his autographed lecture course of 1901: Application of Differential and Integral Calculus to Geometry, a Revision of Principles (principles, namely, of the aforementioned application).

Let it also be remarked that the Education Commission of the Association of German Natural Scientists and Physicians, in its concluding report (1907), advises against combining mathematics and the entire natural sciences in university studies. It instead recommends two separate combinations:
a. Mathematics with physics, with some chemistry,
b. Chemistry and biology, with some physics.

{58} Meeting of February 16, 1910.

Klein presents a provisional report on the development and present condition of instruction methodology for counting and geometry in German elementary schools (see the textbooks by Rude, 1904, and Gehrig, 1906); Mr. Freundlich will soon come back to this in more detail. The remarkable thing is that there seems to be no cooperation with the operations of the higher schools, even when it would be facilitated by the subject matter. Conversely Höfler, in his *Didactics of Mathematics Instruction* (1909), knows nothing at all of the methodological literature of the elementary schools. The textbooks from which elementary school teachers acquire their knowledge of elementary mathematics are of course also quite different from the ones we know. First and foremost are Burkhard's *Letter on Education* (Gera), the extensive *Textbook of Elementary Mathematics* by Lübsen (Leipzig) and the {59} *Comprehensive Encyclopedia of the Mathematical Sciences* by Kleyer (Stuttgart and Bremerhaven). What is most striking is that these works are extraordinarily expensive. E.g. the Kleber volumes for private study in arithmetic and algebra cost a total of 60 Marks!
Bernstein develops ideas about a psychological investigation of various types of mathematicians. The material on which the individual mathematician works is determined less by the type of his ability than by his course of education and the general direction of his time. There is a very important distinction – in mathematics as in all intellectual areas – between constructive natures (compare Schiller, Kant, Plato) and observing-combining ones (cf. Goethe, Hegel, Aristotle). In mathematicians of the first kind, Bernstein continutes, there is perhaps $\frac{3}{4}$ logic and $\frac{1}{4}$ imagination, with those of the other kind $\frac{1}{4}$ logic and $\frac{3}{4}$ imagination. But this distinction cuts across other kinds of oppositions, cf. systematicians and aphorists, step-by-step procedures {60} and intuitive ones, one-sidedness and versatility, deduction and empiricism. These remarks are only first beginnings of the treatment of an important area. Only when one sees clearly here can one hope to write real biographies of mathematicians.

{61} Meeting of February 23, 1910.

Freundlich reports on the principal features of the instruction methodology stemming from Herbart, brought to determinate form by Ziller and now dominant at our elementary schools (see Ziller 1876: *Lectures on General Pedagogy*, Leipzig, see also e.g. Matzat: *Methodology of Geography Instruction*, Berlin 1883, where elementary schools and institutions of higher learning are considered in parallel).

It must be said at the outset that the principle of "gaplessness," which Pestalozzi advanced in his *ABC of Intution* and which Herbart then followed in his enumeration of "normal triangles," is entirely abandoned.
Much more characteristic is the division of instruction in all subjects into determinate stages (formal stages), which Herbart and Ziller base on a systematic psychology:

I. Knowledge acquisition
    1. Obtaining individual representations
        a. "Analysis" of already available representations
        b. Procuring new representations through "synthesis"
    2. Processing of individual representations {62}
        a. Formation of concepts (association)
        b. Elimination of the inessential (system)

II. Application of knowledge (in which one fulfills the pedagogical aim of instruction, or, as Herbart says, its ethical aim, which includes a direction of will).

In the course of this the instruction is to be grouped around certain points of focus (concentration subjects).
Now how is this carried out in the individual subjects, in particular in counting and geometry?
How far have new tendencies advanced in recent years? (Cf. modern symbolic instruction, – cf. the principle of independent activity)
What do experimental psychology and physiological psychology mean?
Has elementary school methodology had an effect on recent educational tendencies at instutions of higher learning?
{63} Nelson offers some considerations on the classification of mathematics within the system of the sciences. If one distinguishes

Subject matter	Method	Source of Knowledge

then all authors before Kant are in agreement in declaring for mathematics:

theory of magnitudes	syllogistic	thought alone (logic).

Kant has instead of this

space and time (whereby the relation between number and time remains unclear)	dogmatic	pure intuition = construction of concepts, thus a third category beside thinking and experience.

The controversy over whether mathematical knowledge stems from logic or experience surges significantly in the 19th century. Non-Euclidean geometry leads many to see geometry as a downright natural science. Stuart Mill and Mach see experience as the foundation of arithmetic as well.

{[64} Meeting of March 2, 1910.
Continuation of the discussion about the position of mathematics in the system of the sciences:

1. In *Contemporary Culture*, ed. Hinneberg, the first two parts are devoted to the "humanities," next follows one part for mathematics, natural science and medicine, lastly one part for the domains of technology. This organization is to be regarded not as the result of systematic reflection, but as a mere reflex of the conditions dominant at German universities.

2. In the program by Münsterberg, distributed at the scientific congresses of the World's Fair in Saint Louis (1904), philosophy and mathematics are set on the highest pedestal as "normative sciences," followed by the historical sciences, the natural sciences, "the sciences of the mind in the narrow sense," i.e. psychology and sociology, and lastly the practical {65} sciences. One sees here the influence of the ideas of Rickert and Windelband, which themselves more or less follow Fichte's *Science of Knowledge* (and thus the classical period of German philosophy).

3. In France the tradition of the encyclopedists (d'Alembert, Condorcet) continues to have an effect throughout the 19th century. Particularly noteworthy are Ampère and Comte.

   a. Ampère has a quite schematic system (1834), worked out by a dichotomizing method, in which (according to the subject matter of the science) he primarily contrasts

      Cosmology and Noology.

      Mathematics belongs, according to him, under "proper cosmology," thus classified by its application to natural science, philosophy belongs to the other side under the group "proper noology."

   b. Comte (1830) is quite different. According to him all knowledge goes through three stages: dogmatic, {66} metaphysical, and scientific. Only part of our knowledge has so far entered the scientific stage. Comte separates knowledge into abstract and concrete, and differentiates within the former by the principle that each subsequenct discipline is dependent on the preceding one:

      Mathematics, mechanics, celestial physics, physics, chemistry, biology, sociology. [Psychology is here intentionally omitted, because at that time not yet available in "scientific form;" logic is distributed across the disciplines mentioned above; philosophy in the more general sense belongs under biology and sociology.]

4. Of the English system-builders let us mention Spencer, who at every point advances the evolutionary approach in correspondence with the ideas of Darwin (1870). He distinguishes a) abstract sciences (which deal {67} with the forms of phenomena), b) abstract-concrete sciences (of the general characteristics of things), c. concrete sciences (the theory of things themselves).

   To (a) belong logic and mathematics, to (b) mechanics, physics and chemistry, to (c) astronomy, geonomy, biology, psychology, sociology. (The latter two, psychology and sociology, are meant so broadly that they include the historical-linguistic fields as well).

5. Wundt (ca. 1885) appears to be an eclectic. After long deliberations he takes as his main division

   I. Philosophy II. Individual sciences

   Under II mathematics occupies a special place, since its nature (according to G. Cantor) is based on freedom. On the other hand the natural sciences and the sciences of the mind are placed in opposition to each other. The leading role which physics plays within the former will perhaps one day be assumed by psychology within the latter. {68} The "practical" sciences, moreover, are unequivocally classified among the "theoretical" sciences.

{71} Table of Contents for the Winter Seminar 1909-10.

p.39 Errera. Inner ear labyrinth.

(Christmas) {72}

p.41 Bernstein. On Georg Cantor.

p.43 Steckel. On Branford
Klein. Phases of pedagogical doctrine concerning mathematics.

p.49 Behrens : Meumann,Meumann, experimental pedagogy.

p.54 Freundlich. On Pestalozzi und Herbart.
Klein, on Theodor Lessing.

p.58 Klein, elementary school methodology.
Bernstein, classification of mathematicians.

p.61 Freundlich, Ziller's system.
Nelson. The nature of mathematics.

p.64 Behrens, Errera, Weyl : The position of mathematics in the system of the sciences.